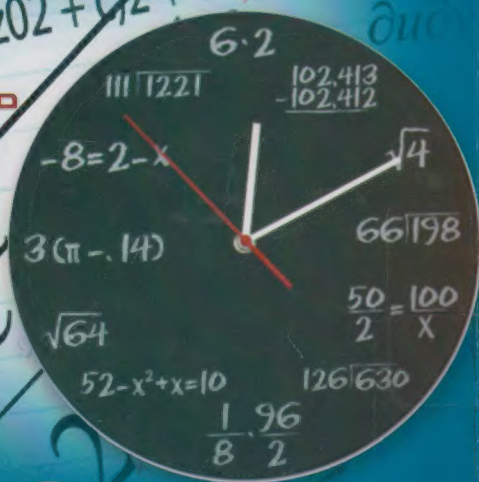


الرياضيات الشاملة

المصفوفات - الاقترانات الجبرية

هندسة التحويلات - المتباينات والبرهجة الخطية

صالح رشيد بطارسة



دارالاسماء

الرياضيات الشاملة

★ المصفوفات والمحددات

★ الاقتérانات الجبرية

★ المتباينات والبرمجة الخطية

★ هندسة التحويلات

تأليف

صالح رشيد بطارسة

EXAMORINA

دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

الناشر
دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

• هاتف: 5658252 - 5658253

• فاكس: 5658254

• العنوان: العبدلي - مقابل البنك العربي

ص. ب: 141781

Email: darosama@orange.jo

www.darosama.net

حقوق الطبع محفوظة

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(2013/6/2214)

510

بطارسة، صالح رشيد

الرياضيات الشاملة/صالح رشيد بطارسة. - عمان: دار أسامة

للنشر والتوزيع، 2013.

() ص.

ر.ا: (2013/6/2214).

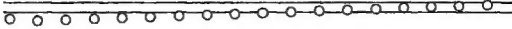
الواصفات: الرياضيات/

ISBN: 978-9957-22-385-4

الفهرس

٩	المصفوفات والمحددات
١٠	Matrix (٧-١) المصفوفة
١١	Types of matrixes (٧-٢) أشكال المصفوفات وأنواعها
١٥	جبر المصفوفات (٧-٣)
٢٨	المحددات (٧-٤)
٣٢	تطبيقات على المحددات والمصفوفات (٧-٥)
٤١	أمثلة محلولة على المصفوفات والمحددات (٧-٦)
٥٩	أسئلة وتدرجات وممارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات (٧-٧)
٦٧	الاقترانات الجبرية
٦٨	Patterns (٨-١) الأنماط
٦٩	Algebraic Function (٨-٢) الاقتران الجبري
٧١	Types of Algebra Functions (٨-٣) أنواع الاقترانات الجبرية
٨٢	Sign of Algebraic (٨-٤) إشارة الاقتران الجبري
٨٧	جبر الاقترانات (٨-٦)
٩٣	Inverse Function (٨-٧) الاقتران العكسي
٩٦	قسمة كثيرات الحدود (٨-٨)
١٠٢	نظريتنا الباقي والعوامل وتحليل كثيرات الحدود إلى عواملها الأولية (٨-٩)
١٠٢	Remainder Theorem نظرية الباقي
١٠٤	The Factors Theorem نظرية العوامل
١١١	حل أنظمة من المعادلات الجبرية بمتغير واحد (٨-١٠)
١٢٠	تجزئة الاقترانات الجبرية النسبية أو (تجزئة الكسور الجبرية) (٨-١١)
١٢٧	أمثلة محلولة على الاقترانات الجبرية (٨-١٢)
١٤٥	أسئلة وتدرجات وممارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات (٨-١٣)
١٧١	المتباينات والبرمجة الخطية

١٧٢	-----	Inequality	(١-٩) المتباينة
١٧٥	-----		(٢-٩) حل نظام من المتباينات بمتغير واحد ومن درجات عدة
١٩٠	-----		(٣-٩) حل نظام من متباينات خطية بمتغيرين
١٩٩	-----	Linear Programming	(٤-٩) البرمجة الخطية
٢٠٣	-----	Graphical Method	(٥-٩) الطريقة الهندسية لحل البرنامج الخطي بمتغيرين
٢١٠	-----	Algebraic method	(٦-٩) الطريقة الجبرية لحل البرنامج الخطي بمتغيرين
٢١٥	-----		(٧-٩) أمثلة محلولة على المتباينات والبرمجة الخطية
٢٣٥	-----		(٨-٩) أسئلة وتدرّيات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات
٢٤٧	-----		هندسة التحويلات
٢٤٨	-----	Isometries	(١-١٠) التساويات القياسية
٢٤٨	-----	Reflection	(٢-١٠) الانعكاس
٢٥٥	-----	Rotation	(٣-١٠) الدوران
٢٦٩	-----		(٥-١٠) أمثلة محلولة على المتباينات والبرمجة الخطية
٢٨٣	-----		(٦-١٠) أسئلة وتدرّيات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات



المقدمة

بعد الاتكال على الله ، ،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار متفر للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدْمِر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلا أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلف من البشر،

لذا لا بُدُّ من القول إن:

الرياضيات جسراً للمبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقادرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمار "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروخ، كلاهما يستحق التكسير".



~ الرياضيات إن كنت لا تدري تُسمى الذكاء وتُشدَّب الأخلاق وتسمو بالإنسان إلى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد القضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).

~ الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالببغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج إلى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.

~ فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة، ، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختتم على ذلك بقولنا آمين!...

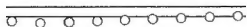
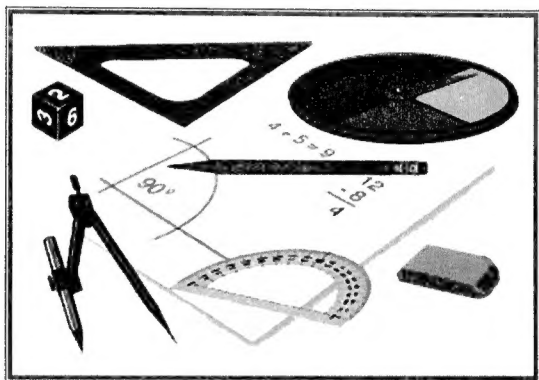
المؤلف

تنويه

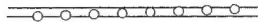
في هذا السياق لا بد لي من أن أنبه الى هذه الملاحظة
منذ البداية فأقول:

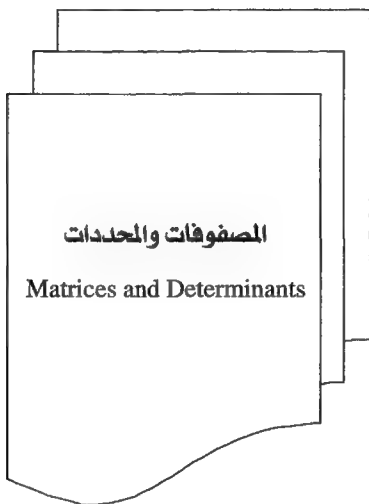
بما أننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا، وجب علينا
استخدام الحواسيب والآلات الحاسبة لتسهيل اجراء العمليات
الرياضيات، واستخراج نتائجها بكل دقة واتقان، وبالسرعة
التي يتصف بها هذا الزمان".

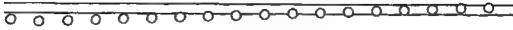
المؤلف



^







Matrix (٧ - ١) المصفوفة

يعود الفضل في ابتكار المصفوفات الى العالم الياباني كوكا (١٦٣٧-١٧٠٨ م) عام ١٦٨٣ م وهو أول من طوّر المحددات المنبثقة عنها.

ولكن العالم البريطاني كايلي (١٧٧٣ - ١٨٥٧ م) هو أول من وضع أسس نظرية المصفوفات بطريقة منظمة وبالشكل الذي سنراه من خلال السطور التالية:

المصفوفة: كائن رياضي مكون من منظومة أعداد حقيقية مرئية على شكل صفوف وأعمدة، تسمى هذه الأعداد عناصر المصفوفة أو مدخلاتها، كما في المثال:

مثال:

في إحدى المدارس الثانوية الشاملة كان عدد طلاب الصف الأول الثانوي العلمي ٢٥ طالباً وعدد طلاب الصف الأول الثانوي الأدبي ٣٤ طالباً وعدد طلاب الصف الأول الثانوي الصناعي ١٦ طالباً وعدد طلاب الصف الثاني الثانوي العلمي ١٩ طالباً وعدد طلاب الصف الثاني الثانوي الأدبي ٤٣ طالباً وعدد طلاب الصف الثاني الثانوي الصناعي ١٨ طالباً

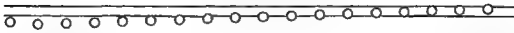
دون المعلومات السابقة على شكل مصفوفة.

سنرمز للمصفوفة بأحد الحروف الهجائية أسفله خط صغير هكذا \underline{A} ، \underline{B} ، \underline{C} فالمصفوفة التي تمثل المعلومات السابقة عند وضع القروء كأعمدة والفصول الدراسية كصفوف هي:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ٣٤ & ١٦ \\ ١٩ & ٤٣ & ١٨ \end{pmatrix}$$

الصف الأول الثانوي
الصف الثاني الثانوي

المصفوفات والمحددات



فالأعداد ٢٥ ، ٣٤ ، ١٦ ، ١٩ ، ٤٣ ، ١٨ هي مدخلات المصفوفة A عدد صفوفها اثنان، وعدد أعمدها ثلاثة.

ويسمى الرمز: عدد الصفوف \times عدد الأعمدة بـ رتبة المصفوفة.

ولكن دون إجراء عملية الضرب إطلاقاً، لأن الرتبة رمز وليست عملية ضرب. فالمصفوفة A أبعادها من الرتبة 2×3 وتكتب هكذا $\frac{1}{3 \times 2}$.

وبشكل عام المصفوفة $\frac{1}{3 \times 2}$ هي المصفوفة التي عدد صفوفها $= m$ صفاً وعدد أعمدها $= n$ عاموداً، تعمل m ، n ط ك أعداد طبيعية.

وتكتب مدخلات المصفوفة بشكل عام، يربط كل مدخلة فيها باسم المصفوفة التي هي عناصر فيها.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \frac{b}{3 \times 2}$$

وهكذا....

وعند تدوين المصفوفة A مجردة من أي معلومات أخرى تظهر على الشكل:

$$\begin{pmatrix} 16 & 34 & 25 \\ 18 & 43 & 19 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 2}$$

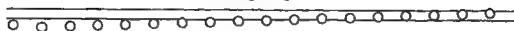
(٧-٢) اشكال المصفوفات وأنواعها Types of matrixes:

والمصفوفات على اشكال وأنواع متعددة، وترتبط بقيم m ، n (عدد الصفوف وعدد الأعمدة) كما يلي:

(i) المصفوفة المستطيلة Rectangular matrix:

$$\left(\frac{3}{1} - \frac{2}{2} \right) = \frac{1}{2 \times 2} \text{ اذا كانت } m \neq n \text{ مثل:}$$





(ii) المصفوفة المربعة Square matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

إذا كانت م = ن مثل:

(iii) مصفوفة الصف Row matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \times 5}$$

إذا كانت م = ١ مثل:

(iv) مصفوفة العمود Column matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 1}$$

إذا كانت ن = ١ مثل:

(v) مصفوفة قطرية Diagonal matrix:

أصفار مثل: حيث مدخلاتها التي لا تشكل قطراً فيها معدومة أي قيمة كل منها

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

(vi) مصفوفة مثلثية:

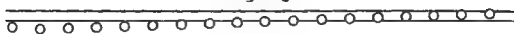
حيث نصف مدخلاتها معدومة ونصفها الآخر مع مدخلات القطر فلها مثل:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

(vii) المصفوفة الصفيرية Zero matrix:

مدخلاتها أصفار ويرمز لها بالرمز هـ مثل:





$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

(iix) مصفوفة الوحدة Unit matrix:

جميع مدخلاتها ما عدا القطر الرئيسي فيها اصفار (القطر الرئيسي هو النازل من اليمين باتجاه اليسار) ويرمز لها بالرمز و مثل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

هذا وتتساوى المصفوفتان اذا تساوت رتبتهما، وكذلك اذا تساوت فيهما المدخلات المتناظرة، والمدخلات المتناظرة هي المدخلات أو العناصر التي تقع في نفس المكان داخل المصفوفتين المتساويتين.

فالمصفوفات المربعة تتساوى اذا تساوت فيهما المدخلات المتناظرة. أي اذا

كان:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \frac{b_{11}}{2 \times 2}$$

والمدخلات المتناظرة ترتب هكذا:

فإن $\frac{b_{11}}{2 \times 2} = \frac{a_{11}}{2 \times 2}$ عندما $a_{11} = b_{11}$ وتقرأ أ واحد واحد = ب واحد واحد

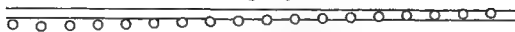
أ اثنين واحد = ب اثنين واحد $a_{12} = b_{12}$

وهكذا... $a_{21} = b_{21}$

$a_{22} = b_{22}$



المصفوفات والمحددات



وبشكل عام وبالرموز تتساوى المصفوفتان $\begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

إذا كان $\begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ حيث $\begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

والمصفوفات المستطيلة التي من نفس الرتبة يمكن أن تتساوى إذا كانت مدخلاتها المتناظرة متساوي، وإذا اختلفت الرتب لا يمكن أن تتساوى المصفوفات.

وبشكل مبسط للغاية نقول: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

إذا وفقط إذا كان $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

كون ذلك يترجم تساوي العناصر أو المدخلات المتناظرة في المصفوفتين المذكورتين.

مثال:

إذا كان:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

أوجد قيمة كل من s ، v .

بما أن المصفوفتين أعلاه متساويتان فإن المدخلات المتناظرة في المصفوفتين متساوية ولذلك:

$$(1) \quad 7 = s + v$$

$$(2) \quad 2 = s - v$$

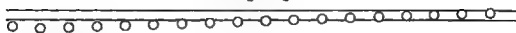
وهنا آل السؤال إلى نظام من المعادلات بمتغيرين.

والحل بالتعويض هكذا:

$$s = 7 - v$$

س موضوع القانون

المصفوفات والمحددات



∴ (٧ - ص) - ٢ = ص ١ وبعد فك القوس والترتيب لحدود المعادلة:

$$٤٩ - ١٤ = ص + ص - ٢ = ص ١ - ص = صفر$$

$$ص - ٢ = ١٦ + ص = صفر$$

$$(ص - ٤) (١٢ - ص) = صفر$$

$$ص = ٤ ، ١٢ \quad \text{قيم ص}$$

$$\text{لكن س} = ص - ٧ = ٤ - ٧ = ٣$$

$$١٢ - ٧ = ٥ \quad \text{قيم س}$$

مثال:

ما نوع وشكل كل مصفوفة فيما يلي وما رتبها؟

$$(i) \begin{bmatrix} ٩ & ٧ & ٢ \\ ٨ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} \leftarrow \text{مستطيلة من الرتبة } ٢ \times ٣ \text{ وتكتب } \frac{١}{٢ \times ٣}$$

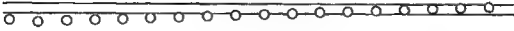
$$(ii) \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \leftarrow \text{مربعة من الرتبة } ٢ \times ٢ \text{ وتكتب } \frac{ب}{٢ \times ٢}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix} \leftarrow \text{مصفوفة الصف / مستطيلة من الرتبة } ١ \times ٣ \text{ وتكتب } \frac{ج}{٣ \times ١}$$

(٧ - ٣) جبر المصفوفات:

جبر المصفوفات معناه: كيفية اجراء العمليات التالية "جمع ، طرح ، قسمة" على المصفوفات، وهنا نركز أن المصفوفات التي نحن بصدددها في هذا المستوى هي مصفوفات حقيقية أي مدخلاتها أعداد حقيقية.





ولنبدأ بعملية الجمع Addition:

الشرط الوحيد لجمع المصفوفات هو أن تكون من نفس الرتبة.

وأما ميكانيكية عملية الجمع فتتم كما يلي: تُجمع المدخلات المتناظرة في المصفوفات المراد جمعها كما يلي:

مثال:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ أوجد ناتج جمع:}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+2 & -1+1 \\ 5+6 & -2+5 & 0+4 \end{pmatrix} \text{ الجواب}$$

والملاحظ أن رتبة المصفوفة الناتجة عن جمع المصفوفات هي نفس رتبة كل

$$\text{من المصفوفتين وبالرموز: } \frac{ج}{ن \times م} = \frac{ب}{ن \times م} + \frac{أ}{ن \times م}$$

$$\text{حيث: } \frac{ج}{ي د} = \frac{ب}{ي د} + \frac{أ}{ي د} \text{ لجميع قيم ي ، د}$$

نظرية:

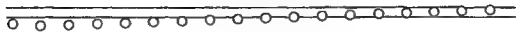
عملية جمع المصفوفات تبديلية وتجميعية ، والدليل هذا المثال ومن شقين:

$$\text{الشق الأول: الجمع مباشرة} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{وكذلك الحلان متساويان} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{الشق الثاني:} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$(1) \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} =$$



وكذلك:
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$(2) \leftarrow \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} =$

الطرفان متساويان

وبشكل عام فإن:

Commutative الجمع تبديلي $A + B = B + A$

Associative الجمع تجمعي $(A + B) + C = A + (B + C)$

Identity matrix هي المصفوفة المحايدة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - $\frac{1}{2 \times 2}$ وبما أن

لعملية جمع المصفوفات فإنه ينتج أن لكل مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2

معكوساً جمعياً Inverse of matrix وهي ما تسمى سالب المصفوفة Negative matrix

كما في المثال:

سالب المصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

كون $-A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

ولذلك فعملية طرح المصفوفات تعرف كما يلي:

$A - B = A + (-B)$ لغوياً المصفوفة $-A$ + سالب المصفوفة B =

هكذا:

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ويمكن أن تتم عملية الطرح مباشرة هكذا:

نفس الجواب السابق $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

والآن للتأكد من أن عملية طرح المصفوفات ليست تبديلية ولا تجميعية

كما يلي:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ & \left(\begin{pmatrix} 6 & 4 & - \\ 2 & 3 & - \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

غير متساويتين

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

وكذلك

$$\left(\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

(١)

غير متساويتين

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) -$$

$$\left(\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

(٢)

وبالرموز $\underline{A} - \underline{B} \neq \underline{B} - \underline{A}$ الطرح غير تبديلي

وكذلك $\underline{A} - (\underline{B} - \underline{C}) \neq (\underline{A} - \underline{B}) - \underline{C}$ الطرح غير تجميعي

♦ ضرب المصفوفات:

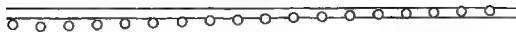
وعملية الضرب في المصفوفات البنّتان:

الأولى: عملية ضرب عدد حقيقي في مصفوفة = عدد حقيقي * مصفوفة

$$\frac{1}{2 \times 2} \times \underline{A} \text{ حيث } \underline{A} \in \mathbb{C}, \underline{A} \text{ مصفوفة مربعة من الرتبة } 2 \times 2$$

وهذا الضرب يسمى أحياناً بالضرب القياسي scalar multiplication

والمقصود هو ضرب أعداد حقيقية في مصفوفات (ليست من نوع واحد).



وعملية الضرب تتم بضرب كل مدخلة من مدخلات المصفوفة بالعدد

الحقيقي هكذا:

مثال:

$$\frac{1}{2 \times 2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ أوجد } \frac{1}{2 \times 2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3)5 & (1)5 \\ (2)5 & (0)5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} 5 = \frac{1}{2 \times 2} 1$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3)3 & (1)(3) & (2)3 \\ (2)3 & (0)3 & (0)3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} 3 = \text{وكذلك}$$

والثانية: عملية ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى ولكن بشروط معينة تثبت

شروط ضرب المصفوفات بما يلي:

$$\frac{\text{ج}}{\text{ي} \times \text{ك}} = \frac{\text{ب}}{\text{ر} \times \text{ك}} \times \frac{\text{أ}}{\text{ر} \times \text{ك}}$$

متساويين

وتفسير ذلك أنه لضرب مصفوفتين لا يشترط تساوي الرتب فيهما وإنما يجب

أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى (عدد مدخلات العمود ر) = عدد صفوف

المصفوفة الثانية (عدد مدخلات الصف ي) والمصفوفة الناتجة تكون من رتبة $\frac{\text{ج}}{\text{ي} \times \text{ك}}$

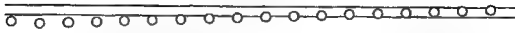
كما في المثال:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 9 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} = \frac{\text{ب}}{2 \times 2} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

$$\text{أوجد } \frac{\text{ب}}{2 \times 2}, \frac{\text{أ}}{2 \times 2} \text{ إذا أمكن ذلك}$$

$$\text{وكذلك } \frac{\text{أ}}{2 \times 2}, \frac{\text{ب}}{2 \times 2} \text{ إذا أمكن ذلك}$$

المصفوفات والمحددات



$$\frac{ب}{٢ \times ٢} \cdot \frac{أ}{٣ \times ٢} = \frac{ب}{٢ \times ٢} \cdot \frac{أ}{٣ \times ٢}$$

بـ عدد صفوفه الثاني (٢)

$$\frac{ج}{٢ \times ٢} = \frac{ب}{٢ \times ٢} \cdot \frac{أ}{٣ \times ٢}$$

أي

وأما كيفية إجراء عملية ضرب المصفوفات فتتم بالخطوات التالية وبإيجاز

شديد:

$$\begin{pmatrix} ٧ & ٦ \\ ٠ & ٩ \\ ١٢ & ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

وتسهيلاً للحل نوزع صفوف المصفوفة الأولى وعلى شكل أعمدة هكذا:

$$\begin{pmatrix} ١٢ \times ٨ + (٠ \times ٥) (٨ \times ٢) & (٠ \times ٨) + (٩ \times ٥) + (٦ \times ٢) \\ ١٢ \times ٤ + (٠ \times ١) + (٧ \times ٣) & (١٠ \times ٤) + (٦ \times ١) + (٦ \times ٣) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٦ \\ ٠ & ٩ \\ ١٢ & ١٠ \end{pmatrix} \begin{matrix} \diagup \diagup \\ \diagup \diagup \\ \diagup \diagup \end{matrix}$$

$$(١) \leftarrow \begin{pmatrix} ١١٠ & ١٣٧ \\ ٦٩ & ٦٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩٦ + ٠ + ١٤ & ٨٠ + ٤٥ + ١٢ \\ ٤٨ + ٠ + ٢١ & ٤٠ + ٩ + ١٨ \end{pmatrix} =$$

$$\frac{ج}{٢ \times ٢} = \frac{ب}{٢ \times ٢} \cdot \frac{أ}{٣ \times ٢}$$

وأما

$$\begin{pmatrix} ٨ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٦ \\ ٠ & ٩ \\ ١٢ & ١٠ \end{pmatrix}$$

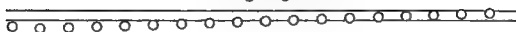
والضرب بإيجاز شديد

وتسهيلاً للحل نوزع صفوف المصفوفة الأولى وعلى شكل أعمدة هكذا:

$$\begin{pmatrix} ٤ \times ٧ + (٨ \times ٦) & (١ \times ٧) + (٥ \times ٦) & (٣ \times ٧) + (٢ \times ٦) \\ ٤ \times ٥ + (٨ \times ٩) & (١ \times ٥) + (٥ \times ٩) & (٣ \times ٥) + (٢ \times ٩) \\ ٤ \times ٤ + (٨ \times ٨) & (٠ \times ٤) + (٥ \times ٨) & (٣ \times ٤) + (٢ \times ٨) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{matrix} \diagup \diagup \diagup \\ \diagup \diagup \diagup \\ \diagup \diagup \diagup \end{matrix}$$



المصفوفات والمحددات



$$(2) \quad \leftarrow \begin{pmatrix} 76 & 27 & 23 \\ 72 & 45 & 18 \\ 128 & 62 & 56 \end{pmatrix} =$$

ومن الملاحظ أن الجوابين ١ ، ٢ غير متساويين. لذا فالضرب غير تبديلي.

ملخص مفيد ويأيجاز شديد:

الضرب ممكن عندما تتساوى عدد أعمدة المصفوفة الأولى مع عدد صفوف

الثانية هكذا:

$$\text{"الضرب ممكن"} \quad \frac{\text{ج}}{\text{ي} \times \text{ك}} = \frac{\text{ب}}{\text{ر ك}} \cdot \frac{\text{أ}}{\text{ي ر}}$$

والضرب غير ممكن عندما لا تتساوى عدد أعمدة المصفوفة الأولى مع عدد

صفوف الثانية هكذا:

$$\text{الضرب غير ممكن} \quad \frac{\text{ب}}{\text{ي ر}} \cdot \frac{\text{أ}}{\text{ر ك}}$$

وعندما يكون الضرب ممكناً فإن $\text{أ} \cdot \text{ب} \neq \text{ب} \cdot \text{أ}$

فـ ضرب المصفوفات غير تبديلي بشكل عام.

وإذا ما ركزنا على المصفوفات المربعة من الرتبة 2×2 واستثنينا

المصفوفات الأخرى، فإن عملية الضرب دائماً ممكنة لتساوي الرتب كون هذا

الشرط يحقق شرط الضرب بالمصفوفات والقائل "عدد أعمدة المصفوفة الأولى =

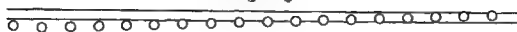
عدد صفوف المصفوفة الثانية".

\times عملية الضرب في المصفوفات تجميعية:

$$\text{أي أن} \left(\frac{\text{ج}}{\text{ي ر}} \cdot \frac{\text{ب}}{\text{٢} \times \text{٢}} \right) \cdot \frac{\text{أ}}{\text{٢} \times \text{٢}} = \frac{\text{ح}}{\text{٢} \times \text{٢}} \cdot \left(\frac{\text{ب}}{\text{ي ر}} \cdot \frac{\text{أ}}{\text{٢} \times \text{٢}} \right)$$

$$\text{كون} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right)$$





$$(1) \leftarrow \begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 23 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 14 & 19 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ وكذلك}$$

$$(2) \leftarrow \begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 23 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

لأن الجوابين (1) ، (2) متساويان.

* والضرب يتوزع على الجمع في المصفوفات كما هو آت:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) +$$

$$(1) \leftarrow \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 21 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \text{كون الطرف الأيمن}$$

$$(2) \leftarrow \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 21 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 14 & 19 \end{pmatrix} = \text{والأيسر}$$

لأن الجوابين (1) ، (2) متساويان

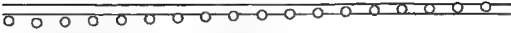
* أما عملية القسمة فيمكن تفسيرها في المصفوفات كما هي في الأعداد

الحقيقية وعلى نفس المنوال كما في هذا المثال:

من المعلوم أن $5 \div 6 = 5 \times \text{مقلوب العدد } 6 = 5 \times \text{النظير الضربي للعدد } 6$

$$= 5 \times \frac{1}{6} \text{ هذا في حقل الأعداد الحقيقية.}$$

المصفوفات والمحددات



وبكيفية مماثلة لهذه الطريقة سنعالج قسمة المصفوفات كما هو آت:

$$= \frac{\text{ب}}{2 \times 2} \times \frac{\text{أ}}{2 \times 2} = \frac{\text{ب}}{2 \times 2} \div \frac{\text{أ}}{2 \times 2}$$

$$، \quad \frac{\text{ب}}{2 \times 2} \times \frac{\text{أ}}{2 \times 2} \text{ النظير الضربي للمصفوفة}$$

ولنبدأ بإيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة أو مقلوب المصفوفة المربعة

كما يلي:

إذا كانت المصفوفة $\frac{\text{س}}{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$ وكان $(\text{د} \cdot \text{ب}) - (\text{ب} \cdot \text{ج}) \neq \text{صفر}$

فإن للمصفوفة $\frac{\text{س}}{2 \times 2}$ نظير ضرب أو مقلوب يرمز له بالرمز $\frac{\text{س}^{-1}}{2 \times 2}$

وأما إذا كان $\text{أ} \cdot \text{د} - \text{ب} \cdot \text{ج} = \text{صفر}$ فلا يوجد للمصفوفة $\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$ نظير

ضربي عندها تسمى المصفوفة منفردة Singular matrix

كما في الأمثلة التالية:

مثال:

هل للمصفوفة $\frac{\text{س}}{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ نظير ضربي؟

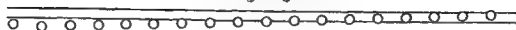
الحل: نجد $\text{أ} \cdot \text{د} - \text{ب} \cdot \text{ج} = (5 \times 1) - (-1 \times 5) =$

$5 - 5 =$ صفر

الجواب: لا ليس لها نظير ضربي فهي منفردة.

مثال:

هل للمصفوفة $\frac{\text{س}}{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ نظير ضربي؟



الحل: نجد أ د - ب ج = (١) (٢) - (٢) (١ × ٢)

$$٥ = ٢ + ٢ =$$

الجواب: نعم لها نظير ضربي.

والسؤال الآن: ما هو النظير الضربي للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ ؟

الحل: نجد كما يلي:

النظير الضربي أو مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$ ويكتب على الشكل $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}^{-١}$

يساوي: $\frac{١}{أد - ب ج} = \frac{١}{(٢) - (٢)}$ بعد تبديل أ محل د
وتغيير اشارتي كل من ب ، ج
هكذا:

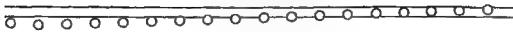
$$\begin{pmatrix} (٢) - (١) & (٢) (-\frac{١}{٥}) \\ (١) (-\frac{١}{٥}) & (١) (-\frac{١}{٥}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ - ٢ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} \frac{١}{٥} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{٢}{٥} - \frac{٢}{٥} & \frac{٢}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix} =$$

أي أن $\begin{pmatrix} \frac{٢}{٥} - \frac{٢}{٥} & \frac{٢}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

لأن $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{٢}{٥} - \frac{٢}{٥} & \frac{٢}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٢}{٥} - \frac{٢}{٥} & \frac{٢}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} =$$



مع ملاحظة أن الضرب في هذه الحالة فقط تبديلي.

والجواب في الحالتين مصفوفة الوحدة المحايدة للضرب.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

والآن قسمة المصفوفات المربعة من الرتبة $n \times n$ تتم كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

كون $\frac{1}{2 \times 2}$ ، $\frac{1}{2 \times 2}$ كلاهما غير منفردة (تأكد من ذلك) فإن القسمة بالرموز:

$$\frac{1}{2 \times 2} \cdot \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} \div \frac{1}{2 \times 2}$$

أي أنه حتى تقسم المصفوفة $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ على المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ فإننا نضرب

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

فإننا نجد $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (النظير الضربي)

$$أ - ب ج = 6 - 10 = (2 \times 3) - (0 \times 2) \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2 \times 2} \times \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} \div \frac{1}{2 \times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$



المصفوفات والمحددات

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{3-}{4} \\ \frac{3-}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{4} + \frac{3-}{4} & \frac{8}{4} - \frac{5}{4} \\ \frac{6}{4} + \frac{9-}{4} & \frac{4}{4} - \frac{10}{4} \end{pmatrix} =$$

$$\text{هذا خارج القسمة} \quad \begin{pmatrix} 9 & 3- \\ 3- & 11 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} =$$

مثال:

أوجد النظير الضربي للمصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2 \times 2}$ وأوجد:

أد-ب ج = $2 - (8 -) 1 - (7) = 7 - 16 - = 23 \neq$ صفر

نعم يوجد نظير ضربي للمصفوفة $\frac{1}{2 \times 2}$ ورمزه $\frac{1}{2 \times 2}$ وإيجاده هكذا:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{23} & \frac{8}{23} \\ \frac{2-}{23} & \frac{7}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8- \\ 2 & 7- \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{23-} = \frac{1}{2 \times 2}$$

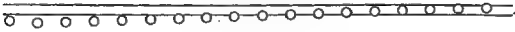
وللتحقق $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{23} & \frac{8}{23} \\ \frac{2-}{23} & \frac{7}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{23} & \frac{8}{23} \\ \frac{2-}{23} & \frac{7}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

"الضرب في هذه الحالة فقط تبديلي" المصفوفة \times نظيرها الضربي = النظير

الضربي \times المصفوفة

مصفوفة الوحدة. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{23} - \frac{2}{23} & \frac{23}{23} \\ \frac{16}{23} + \frac{7}{23} & \frac{56}{23} - \frac{56}{23} \end{pmatrix} =$

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب



ملحوظة جديرة بالاهتمام:

هناك خاصية في المصفوفات لم ولن تجد لها مثيلاً في حقل الأعداد الحقيقية على الإطلاق وهي:

يمكن أن يكون حاصل ضرب مصفوفتين هو المصفوفة الصفرية دون أن تكون أي من هاتين المصفوفتين المصفوفة الصفرية.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ هكذا:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ وكذلك}$$

عندها تسمى هاتان المصفوفتان قواسم المصفوفة الصفرية، وتجاوزاً قواسم الصفر (في المصفوفات).

وهذه الخاصية تخالف القاعدة الهامة في الأعداد الحقيقية القائلة: إذا كان حاصل ضرب عددين حقيقيين هو الصفر، فإن أحدهما أو كلاهما يجب أن يكون صفراً. وبالرموز:

إذا كان $a \neq 0$ ، $b = \text{صفر}$ ، لكل a ، $b \in \mathbb{C}$

فإن $a = \text{صفر}$ ، $b = \text{صفر}$ أو كليهما.

والتي تستخدم في حل بعض المعادلات التربيعية في حقل الأعداد الحقيقية بطريقة التحليل إلى العوامل كما مرّ سابقاً.

$$((x^2 - 5x - 6 = \text{صفر} \leftarrow (x - 6)(x + 1) = \text{صفر}$$

وعندما $x = 6$ ، $x = -1$ ، $x = \text{صفر}$ ، $x = 1$ ، $x = \text{صفر}$

لذا فإن $x = 6$ ، $x = -1$.

(٧ - ٤) المحددات:

أما المحددة Determinant:

فقد نتج مفهومها عن دراسة أنظمة المعادلات الخطية ثم تطور هذا المفهوم حتى شملت تطبيقاته مواضيع رياضية عديدة في مجالات العلوم كالتخطيط والاقتصاد والصناعة وعلم الاجتماع وغيرها..

والمحددات أعداد تحدد فيما إذا كان للنظام المكون من معادلات خطية حل أم لا، والمحددة نفسها تستخدم لإيجاد هذا الحل إن وجد كما سيأتي فيما بعد. هذا ويرتبط بكل مصفوفة مربعة عدد حقيقي يُسمى "محددة المصفوفة".

$$\text{فإذا كانت } \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} \text{ مصفوفة مربعة}$$

فتعرف محددة المصفوفة $\frac{1}{2 \times 2}$ والتي يرمز لها بالرمز $\left| \frac{1}{2 \times 2} \right|$ على النحو:

$$\begin{vmatrix} 11 & 11 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

مثال:

$$\text{إذا كانت } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ أوجد } \left| \frac{1}{2 \times 2} \right|, \left| \frac{ب}{2 \times 2} \right|$$

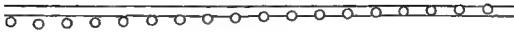
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{ب}{2 \times 2}$$

$$7 = 2 - 10 = (3) (1) - (0) (2) = \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2 \times 2} \right|$$

$$\text{وكذلك } (4 - 1) - (3) (1 - 2) = \left| \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{ب}{2 \times 2} \right|$$

$$(8 - 3) - (3 - 2) =$$

$$5 = 8 + 3 - =$$



$$\begin{pmatrix} r_1 & r_1 & r_1 \\ r_2 & r_2 & r_2 \\ r_3 & r_3 & r_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 3} \text{ وإذا كانت}$$

$$\left| \frac{1}{3 \times 3} \right| = \frac{1}{3 \times 3} \text{ فإن محددة}$$

$$= \begin{vmatrix} r_1 & r_1 & r_1 \\ r_2 & r_2 & r_2 \\ r_3 & r_3 & r_3 \end{vmatrix} = \text{نبدأ بالصف الأول ونأخذ } r_1, r_2, r_3 \text{ ونقرط}$$

$$\text{أعمدة } \left| \frac{1}{3 \times 3} \right| \text{ بالطريقة التالية:}$$

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2 & r_3 \end{vmatrix} r_1 + \begin{vmatrix} r_2 & r_3 \\ r_3 & r_1 \end{vmatrix} r_2 - \begin{vmatrix} r_3 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} r_3 =$$

$$\text{مثال: إذا كانت } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 3} \text{ فجد } |A|$$

$$\text{الحل: } \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = |A| \text{ ولفرطه لمحددات ثنائية نقول:}$$

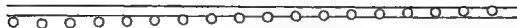
نأخذ العدد 2 من الصف الأول ونضربه بالمحددة الناتجة دون أخذ الصف أو العمود الذي يحوي العدد 2 هكذا:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} 2$$

ونأخذ العدد 4 من الصف الأول ونضربه بالمحددة الناتجة دون أخذ الصف أو العمود الذي يحوي العمود 4 هكذا:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} 4$$

المصفوفات والمحددات



وكذلك نأخذ العدد ٣ من الصف الأول ونضربه بالمحددة الناتجة دون أخذ الصف

أو العمود الذي يحوي العدد ٣ هكذا:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} 3$$

والآن نعيد ترتيب المحددة الثنائية هكذا:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} 3 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} 4 - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} 2 = 12$$

$$2 = (4 + 4) - (2 + 2) 2 + (2 + 10) 4 - (2 - 10)$$

$$2 = (8) - (4) - (12) 4 - 16 = 24 - 48 - 24 = -56$$

لدراسة العمليات الحسابية المرتبطة بالمحددات لا بد من بيان خصائص هذه المحددات والتي تُسهل كثيراً من هذه العمليات الحسابية وتوفر الوقت والجهد عند إجرائها، ومن هذه الخواص وللمصفوفات المربعة فقط:

(i) إذا كانت مدخلات صفين أو عامودين في مصفوفة متطابقتين، فإن قيمة

المحددة = صفر

مثال: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$ محددة ١ تساوي صفراً كون العامود الأول يطابق العامود الثاني

هكذا $1 = (4 - 12) 2 - (4 - 12) 3 + (8 - 8) 0 = 0$

$$24 - 24 + 24 = \text{صفر} = \text{صفر}$$

(ii) إذا غيرنا وضع المحدد بحيث جعلنا المحددة صفوفاً مصفوفة أعمدة فإن قيمة

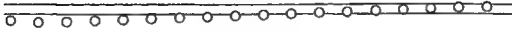
المحددة لا تتغير إطلاقاً.

مثال:

قيمة محددة $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ = قيمة محددة $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ بعد تغيير الصفوف بالأعمدة



المصفوفات والمحددات



$$\text{هكذا: } | \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} | = 11$$

$$| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} | = 11$$

(iii) عند تبديل صف مكان صف أو عامود مكان عامود في مصفوفة مربعة فإن محددة المصفوفة الجديدة تساوي محددة المصفوفة الأصلية بالمقدار وتخالفها بالإشارة.

مثال:

$$\text{بعد تغيير العامود الأول والثاني} \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = | \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} |$$

$$\text{هكذا: } | \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} | = (5 \times 1 - 4 \times 3) = -7$$

$$| \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} | = (3 \times 4 - 5 \times 1) = 7$$

* "إذا تناسب صفات أو عامودات" أي إذا كان أحد الصفوف أو الأعمدة في مصفوفة ما يساوي عدداً ثابتاً مضروباً في الصف الآخر أو العامود الآخر فإن قيمة محددة المصفوفة يساوي صفراً.

مثال:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 20 & 10 \end{vmatrix} = | \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 20 & 10 \end{vmatrix} |$$

$$\text{أو الصف الثاني = الصف الأول} \times 5$$

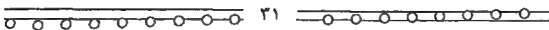
$$\text{هكذا: } | \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 20 & 10 \end{vmatrix} | = (4 \times 10 - 20 \times 2) = 0 = \text{صفراً}$$

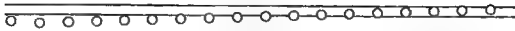
* إذا كانت جميع مدخلات صف أو عامود في مصفوفة ما أصفاراً فإن قيمة محددة المصفوفة تلك يساوي صفراً.

مثال:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = | \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} |$$

$$\text{هكذا: } | \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} | = (0 \times 0 - 3 \times 0) = 0 = \text{صفراً}$$





(٧ - ٥) تطبيقات على المحددات والمصفوفات

(i) تستخدم المحددات في إيجاد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين أ(س_١، ص_١)

$$\text{ب (س}_2\text{، ص}_2\text{) حيث المعادلة تنتج من المحددة} \quad \text{صفر} = \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{ص} \\ 1 & \text{س}_1 & \text{ص}_1 \\ 1 & \text{س}_2 & \text{ص}_2 \end{vmatrix}$$

مثال:

إذا كانت أ (٣، ٤) ، ب (-٥، ٦) فإن معادلة الخط المستقيم \Leftrightarrow ب تعطى من المحددة

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{ص} \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

هكذا: س = $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \text{ ص} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$

أي أن:

$$\text{س (-٤ - ٦) ص - (٣ + ٥) + (١٨ + ٢٠) = صفر}$$

$$-٢٨ - ٨ \text{ ص} + ٣٨ = \text{صفر}$$

$$\text{أو } ٨ - ٢ \text{ ص} = ٣٨ - ٢٨$$

$$\frac{٢٨}{٨} + \frac{٢ \text{ ص}}{٨} = \frac{٣٨}{٨}$$

$$\text{ص} = \frac{١٩}{٤} + \frac{١}{٤} \text{ ص}$$

وللتحقق من صحة الحل:

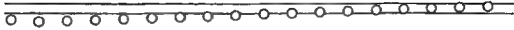
نجد ١ - معادلة الخط المستقيم كما في القانون ص - ص_١ = م(س - س_١)

(هندسة تحليلية) هكذا:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4 - 6}{3 - 5} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$$

$$\frac{1}{4} = \text{كما هو في المعادلة حيث حاصل س}$$

المصفوفات والمحددات



ولو أوجدنا المعادلة بالهندسة التحليلية:

$$\text{ص - ص}_1 = \text{م للسقيم (م - ص)}$$

$$\text{ص - ص}_1 = 6 - \frac{1}{4} = 6 - \frac{1}{4} = 5 \frac{3}{4}$$

$$\text{ص - ص}_1 = 6 - \frac{1}{4} = 6 - \frac{1}{4} = 5 \frac{3}{4}$$

$$\text{ص - ص}_1 = 6 - \frac{1}{4} = 6 - \frac{1}{4} = 5 \frac{3}{4}$$

$$\text{ص - ص}_1 = 6 - \frac{1}{4} = 6 - \frac{1}{4} = 5 \frac{3}{4} \leftarrow \text{ص - ص}_1 = 6 - \frac{1}{4} = 5 \frac{3}{4}$$

(ii) وهناك تطبيق آخر على المحددات هو إيجاد مساحة المثلث أ ب ج بمعرفة

احداثيات رؤوسه كما يلي:

إذا كانت النقط أ (ص₁ ، ص₂)

ب (ص₃ ، ص₄)

ج (ص₅ ، ص₆) هي رؤوس المثلث أ ب ج.

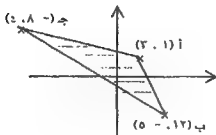
فإن مساحته يمكن إيجادها من المحددة:

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \text{ص}_1 & \text{ص}_2 & 1 \\ \text{ص}_3 & \text{ص}_4 & 1 \\ \text{ص}_5 & \text{ص}_6 & 1 \end{vmatrix}$$

وبما أن المساحة دائماً موجبة لذا نستخدم الإشارة السالبة أعلاه عندما تكون

قيمة المحددة الى كمية سالبة لتصبح المساحة موجبة، وإلا فإننا نستخدم الإشارة الموجبة دائماً.

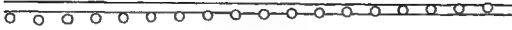
مثال:



أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقط

أ (3 ، 1) ، ب (0 - 12) ، ج (-5 ، 8)

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \\ -5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 9 & -10 \end{vmatrix} \frac{1}{2} \pm =$$

$$\{ (10)(1) - (9)(9) \} \frac{1}{2} \pm = \text{المساحة}$$

$$\{ 10 + 81 - \} \frac{1}{2} \pm =$$

$$\frac{1}{2} \pm = \{ 71 - \} \text{وهنا نستخدم } - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{المساحة} = - \frac{1}{2} (71) = \frac{71}{2} = 35,5 \text{ وحدة مساحة.}$$

(iii) وهناك تطبيق ثالث على المحددات والمصفوفات معاً وهو حل نظام من المعادلات الخطية بمتغيرين وثلاثة متغيرات.

والحل يتم بطريقتين:

الأولى: بالمحددات وقاعدة كرامر بالذات.

والثانية: بالمصفوفات وعمليات الصف البسيط بالتأكيد.

ولنبدأ بالطريقة الأولى:

لقد طوّر العالم السويسري كرامر (1704 - 1752) م عام 1750 م طرناً خاصة باستخدام المحددات لحل أنظمة من المعادلات الخطية

بمتغيرين على الصورة: أ س + ب ص + ج = صفر

وثلاثة متغيرات على الصورة: أ س + ب ص + ج ع + د = صفر

كما يلي:

× قاعدة كرامر Cramer's Rule في حل المعادلات الخطية.

مثال:

أوجد مجموعة الحل للنظام 5 س = 2 + ص

ص = 7 - 4 س مستخدماً قاعدة كرامر:

يجب وضع المعادلات الخطية على الصورة أ س + ب ص = ج كونها بمتغيرين

فقط هكذا:

$$\begin{matrix} \text{م المعاملات} & \cdot & \text{م المتغيرات} & = & \text{م الثوابت} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{تم كتابة النظام على الصورة}$$

حيث $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \text{م}$ تسمى مصفوفة المعاملات

و $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المتغيرات

و $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة الثوابت

ثم نجد قيمة المحددات التالية:

$$9 = 4 + 5 = (4)(1) - (1)(5) \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & -5 \\ 1 & 4 \end{array} \right| = | \text{م} |$$

| م | باستبدال معاملات العمود الأول (الثوابت)

$$\text{أي } | \text{م} | = \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{array} \right| = (1)(7) - (1)(2) = 9$$

$$9 = 7 + 2 =$$

$$1 = \frac{9}{9} = \frac{| \text{م} |}{| \text{م} |} = \text{منها س}$$

| م | باستبدال معاملات العمود الثاني (الثوابت)

$$\text{أي } | \text{م} | = \left| \begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{array} \right| = (2)(4) - (7)(5) = -27$$

$$-27 = 8 - 35 =$$

$$3 = \frac{-27}{-9} = \frac{| \text{م} |}{| \text{م} |} = \text{منها ص}$$

مجموعة الحل للنظام $\{(3, 1)\}$

مثال:

أوجد مجموعة الحل للنظام $\begin{matrix} \text{ع} + \text{ص} + \text{س} = 14 \\ \text{ع} + \text{ص} = 9 \end{matrix}$

$\begin{matrix} \text{ع} + \text{ص} + \text{س} = 14 \\ \text{ع} + \text{ص} = 9 \end{matrix}$

مستخدماً قانون كرامر $\begin{matrix} \text{ع} + \text{ص} + \text{س} = 14 \\ \text{ع} + \text{ص} = 9 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} \text{ع} + \text{ص} + \text{س} = 14 \\ \text{ع} + \text{ص} = 9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 \\ 9 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 \\ 9 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{matrix} \text{ع} + \text{ص} + \text{س} = 14 \\ \text{ع} + \text{ص} = 9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 14 \cdot 1 - 9 \cdot 1 = 5$$

$$\begin{matrix} \text{ع} + \text{ص} + \text{س} = 14 \\ \text{ع} + \text{ص} = 9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 14 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 9 = -9$$

$$\begin{matrix} \text{ع} + \text{ص} + \text{س} = 14 \\ \text{ع} + \text{ص} = 9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

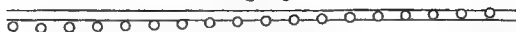
$$\Delta = 14 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 9 = -9$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-9}{5} = -1.8$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \frac{-9}{5} = -1.8$$

مجموعة الحل = $\{(1, 1, 1)\}$



الطريقة الثانية: فهي حل الأنظمة النمطية بالمصفوفات وتتم بعمليات الصف البسيط Simple Row Operations كما في المثال:

مثال:

أوجد مجموعة الحل للنظام $س + ص = ٩$ ، $س + ٤ ص = ١٨$ باستخدام عمليات الصف البسيط، وطريقة الحل يشيء من الإيجاز.

* نكون ما يسمى بالمصفوفة الموسعة Extension matrix هكذا:

والمصفوفة الموسعة هي التي تتكون من معاملات المتغيرات والثوابت (الحدود المطلقة) في النظام كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cc|c} ٩ & ١ & ١ \\ ١٨ & ٤ & ١ \end{array} \right]$$

ثم نحول هذه المصفوفة الى مصفوفة أخرى على الشكل:

$$\left[\begin{array}{cc|c} ١٨ & ٤ & ١ \\ ٩ & ١ & ١ \end{array} \right] \text{ حيث القسم الأيمن منها مصفوفة الوحدة}$$

$$\text{والأيسر منها مجموعة الحل} \left[\begin{array}{cc} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{array} \right]$$

لنظام (س، ص)

وذلك بوحدة أو أكثر من العمليات التالية:

- تبديل ترتيب صفوف المصفوفة الموسعة كأن نبديل الصف الأول بالثاني والعكس.

- ضرب أي صف في المصفوفة الموسعة بعدد حقيقي مغاير للصفر ثم جمعه أو طرحه من صف آخر.

ومن هنا جاء اسم عمليات الصف البسيط.

وأما الحل هكذا:

طرحاً $\left(\begin{array}{c|cc} 9 & 1 & 1 \\ \hline 18 & 4 & 1 \end{array} \right)$ نجعل كل مدخلة من المدخلات داخل الدوائر المنقطة واحد صحيح والباقي أصفار.

كما يلي:

$$- \frac{1}{3} \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 1 & 1 \\ \hline 9 & 4 & 1 \end{array} \right) \text{ اطرح الصف الثاني من الصف الأول}$$

$$\frac{1}{3} - \text{اضرب الثاني}$$

$$\text{طرحاً } \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \text{ اطرح الثاني من الصف الأول}$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 6 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

أي أن $s = 6$ ، $v = 3$

عندها تكون مجموعة الحل $\{ (3, 6) \}$ تحقق من صحة ذلك الحل.

ونستخدم طريقة عمليات الصف البسيط هذه في حل أنظمة من المعادلات الخطية التي تحتوي على ثلاثة متغيرات كما يلي:

مثال:

حل النظام:

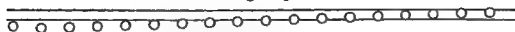
$$s + v + e = 2$$

$$s + 3v + e = 2$$

$$2s - v - e = 1 \text{ بطريقة الصف البسيط}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \text{ نكتب المصفوفة الموسعة}$$

الحل:



ونحول مصفوفة المعاملات فيها الى مصفوفة الوحدة كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ الى مصفوفة الوحدة } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ان أمكن ذلك}$$

$$\begin{pmatrix} 1س \\ 1ص \\ 1ع \end{pmatrix} \text{ الى } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ عندها تتحول مصفوفة الثوابت}$$

وهي تكافئ مجموعة الحل للنظام أي $\{1س, 1ص, 1ع\}$ هكذا:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1-) \\ \downarrow \end{matrix}$$

نحاول أن نحصل على الأصفار وبشكل دائري هكذا:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2-) \\ \uparrow \end{matrix}$$

ضرب الصف الأول في -1 وجمعه الى الثاني

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ (3-) \end{matrix}$$

ضرب الصف الأول بالعدد -2 وجمعه الى الثاني

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ (3-) \end{matrix}$$

ضرب الصف الثاني بالعدد 2 واضافته الى الثالث

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ (3-) \end{matrix}$$

ضرب الصف الثالث بالعدد -2 وجمعه الى الثاني

$$\Rightarrow \text{ضرب الثالث بالعدد } -\frac{1}{2} \text{ وإضافته إلى الثاني} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (-) \\ (-) \\ (-) \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \text{ضرب الثالث بالعدد } -1 \text{ وجمعه إلى الأول} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) (-)$$

$$\Rightarrow \text{ضرب الثاني بالعدد } -1 \text{ وجمعه إلى الأول} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) (-)$$

$$\text{ومنه } S_1 = 1, S_2 = -1, S_3 = 2$$

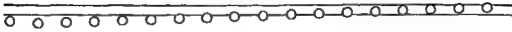
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & - & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

مجموع الحل للنظام = $\{ (1, -1, 2) \}$

"تحقق من صحة الحل بطريقة كريمة"

ملحوظة:

"طريقة كريمة لحل النظام من المعادلات الخطية بمتغيرين أو ثلاثة متغيرات هي الأسهل، ولكن طريقة الصف البسيط هي الأشهر، والتوضيح سيأتي في فصل لاحق من هذا المؤلف"



(٧ - ٦) أمثلة محلولة على المصفوفات والمحددات

مثال (١) :

موسى ومحمود ومعين ثلاثة مزارعين يمتلكون ثلاث مزارع للحمضيات
 زرع موسى في مزرعته ١٥٠ شجرة ليمون، ١٢٠ شجرة برتقال، ٥٠ شجرة مندلينا
 وزرع محمود في مزرعته ٨٠ شجرة ليمون ١٠٠ شجرة برتقال ولم يزرع مندلينا على الإطلاق
 وزرع معين في مزرعته ٢٠٠ شجرة ليمون، ١٧٠ شجرة برتقال، ٣٠ شجرة مندلينا
 رتب المعلومات السابقة في جدول بسيط ثم اكتب المصفوفة التي تمثل هذا
 الجدول.

الحل:

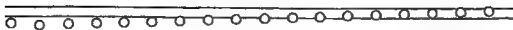
هناك شكلان بالجدول هما:

الشكل الأول:

الشجرة المزرعة	ليمون	برتقال	مندلينا
مزرعة موسى	١٥٠	١٢٠	٥٠
مزرعة محمود	٨٠	١٠٠	٠
مزرعة معين	٢٠٠	١٧	٣٠

أما المصفوفة التي تمثل هذا الجدول فهي:

$$\begin{pmatrix} ٥٠ & ١٢٠ & ١٥٠ \\ ٠ & ١٠٠ & ٨٠ \\ ٣٠ & ١٧٠ & ٢٠٠ \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \times 3}$$



الشكل الثاني:

المزرعة \ الشجرة	مزرعة موسى	مزرعة محمود	مزرعة معين
ليمون	١٥٠	٨٠	٢٠٠
برتقال	١٢٠	١٠٠	١٧٠
مندلينا	٥٠	٠	٣٠

أما المصفوفة التي تمثل هذا الجدول فهي:

$$\begin{pmatrix} 200 & 80 & 150 \\ 170 & 100 & 120 \\ 30 & 0 & 50 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{ب} \\ 3 \times 3 \end{matrix}$$

الملاحظ أن $\begin{matrix} \text{أ} \\ 3 \times 3 \end{matrix} \neq \begin{matrix} \text{ب} \\ 3 \times 3 \end{matrix}$ مع أنها نفس المعلومات كون الصفوف أحدها أصبحت أعمدة في الأخرى والعكس.

مثال (٢):

ما قيمة المتغير س إذا كان:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -6 + 5س \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2س \end{pmatrix}$$

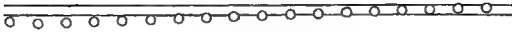
بما أن المصفوفتين متساويتان فإن مدخلاتها المتناظرة متطابقة.

$$\text{أي أن } 5س + 6 = 2س$$

$$3س - 5 = 6 = \text{صفر}$$

$$(س - 6) = (س + ٠) = \text{صفر}$$

$$س = 6, س = -1 \Rightarrow \text{قيمة س} = \{-1, 6\}$$



مثال (٣):

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \underline{\underline{ب}}, \quad \begin{pmatrix} ١ & - & ٥ \\ ٤ & & ٠ \end{pmatrix} = \underline{\underline{أ}}$$

أوجد كل ما يأتي إذا أمكن:

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & -٢ & -٣ \end{pmatrix} = \underline{\underline{ج}}$$

(i) $\frac{ب}{٢ \times ٢} + \frac{أ}{٢ \times ٢}$ يمكن كونها من نفس الرتبة

والجواب:

$$\begin{pmatrix} ١ & ٨ \\ ٧ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & - & ٥ \\ ٤ & & ٠ \end{pmatrix}$$

(ii) $\frac{ب}{٢ \times ٢} - \frac{أ}{٢ \times ٢}$ يمكن كونها من نفس الرتبة

والجواب:

$$\begin{pmatrix} ٣ & - & ٢ \\ ١ & ١ & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & - & ٥ \\ ٤ & & ٠ \end{pmatrix}$$

مثال (٤):

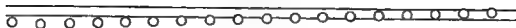
$$\begin{pmatrix} ٠ & ١ & - & ٥ \\ ٨ & ٠ & & ٧ \end{pmatrix} = \underline{\underline{ب}}, \quad \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & - & ١ \end{pmatrix} = \underline{\underline{أ}}$$

أوجد إذا كان ممكناً:

(i) $\frac{ب}{٢ \times ٢} \cdot \frac{أ}{٢ \times ٢}$ يمكن كون عدد أعمدة الأول = عدد صفوف الثانية = ٢

والجواب $\underline{\underline{ج}}$ هكذا:

$$\begin{pmatrix} ٨ + ٠ & ٠ + ٢ & - & ٧ + ١٠ \\ ٨ \times ٢ & - & ٠ & ٠ + ١ & - & ٢١ & - & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & - & ٥ \\ ٨ & ٠ & & ٧ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & - & ١ \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 17 \\ 24 & 1 & 16 \end{pmatrix} =$$

(ii) $\frac{1}{2 \times 2} \cdot \frac{b}{2 \times 2}$ لا يمكن كون عدد أعمدة الأول \neq عدد صفوف الثاني لأن $2 \neq 3$

مثال (٥):

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{إذا كانت } A$$

فأوجد A^2 ، A^3 إذا أمكن

(i) $A^2 = \frac{1}{2 \times 2} \cdot \frac{b}{2 \times 2}$ يمكن كون عدد أعمدة الأول = عدد صفوف الثاني = 2

والجواب:

$$\begin{pmatrix} 6 & -10 & -20 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & -20 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

(ii) $A^3 = \frac{1}{2 \times 2} \cdot \frac{b}{2 \times 2}$ دائماً يمكن هذا النوع من الضرب \cdot عدد حقيقي في مصفوفة

والجواب:

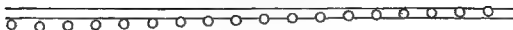
$$\begin{pmatrix} (3) & (-) & (0) & (0) & (0) \\ (2) & (0) & (0) & (0) & (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -20 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} =$$

مثال (٦):

أوجد التظير الضربي لكل من المصفوفات إذا كان لها نظير ضربي.





$$\begin{pmatrix} 4 & - & 1 \\ 2 & 6 & - \end{pmatrix} \quad (i)$$

محدد المصفوفة = $(2 \times 1) - (-)(4) = (6 - 2) = 4$ لها نظير ضربي

$$\begin{pmatrix} 4 & - & 2 \\ 22 & 22 & - \\ 1 & - & 6 \\ 22 & 22 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{22 -} = \begin{pmatrix} 4 & - & 1 \\ 2 & 6 & - \end{pmatrix} = \text{النظير الضربي}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & - & 2 \\ 3 & 1 & - \end{pmatrix} \quad (ii)$$

محدد المصفوفة = $(3 \times 2) - (-)(6) = (1 - 6) = -5$

فهي منفردة ليس لها نظير ضربي.

$$\begin{pmatrix} \text{جاس} & \text{جتاس} \\ \text{جتاس} & - \text{جاس} \end{pmatrix} \quad (iii)$$

محدد المصفوفة = $(\text{جاس})(\text{جتاس}) - (\text{جاس})(\text{جاس})$

$$= \text{جاس}^2 - \text{جاس}^2 = 0$$

$$= 0 \quad (\text{جاس}) \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} \text{جاس} & - \text{جاس} \\ \text{جاس} & - \text{جاس} \end{pmatrix} \frac{1}{1 -} = \begin{pmatrix} \text{جاس} & \text{جتاس} \\ \text{جتاس} & - \text{جاس} \end{pmatrix} = \text{النظير الضربي}$$

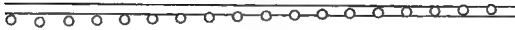
$$\begin{pmatrix} \text{جاس} & \text{جاس} \\ \text{جاس} & - \text{جاس} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{جاس} & - \text{جاس} \\ \text{جاس} & \text{جاس} \end{pmatrix} 1 - =$$

والملاحظ أن النظير الضربي للمصفوفة هو نفس المصفوفة.

مثال (٧):

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين:

أ (٥ ، ٤) ، ب (٦ ، ٨) بالمحددات أولاً ويقوانين الهندسة التحليلية ثانياً.



معادلة الخط المستقيم ناتجة عن المحددة

$$\text{صفر هكذا:} = \begin{vmatrix} 1 & \text{ص} & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

أي أن وبعد فك المحدودات:

$$\text{صفر} = (4 - 8) - (5 - 6) + (4 - 20) = 24 - 40 = -16$$

$$-16 = \text{ص} + 8 + 16$$

$$\boxed{\text{ص} = -16}$$

أما الحل بقوانين الهندسة التحليلية فهكذا:

معادلة الخط المستقيم:

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{ص}_2 - \text{ص}_1} (\text{ص} - \text{ص}_1) \text{ حيث } \text{ص}_1 = 1$$

$$\text{ص} = \frac{4 - 8}{5 - 6} = \frac{\text{ص} - 1}{\text{ص} - 1} = 1$$

ويأخذ النقطة (4, 5)

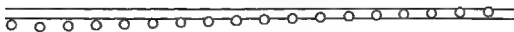
$$\text{ص} - 4 = \frac{5 - 4}{5 - 4} (\text{ص} - 4)$$

$$\text{ص} - 4 = 5 - 4$$

$$\text{ص} = 5 + 4 = 9$$

$$\boxed{\text{ص} = -16}$$

الجواب نفسه في الطريقتين.



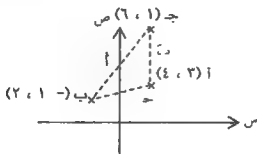
مثال (٨):

احسب مساحة المثلث أ ب ج الذي رؤوسه النقط:

أ (٢، ٤)، ب (١، ٢)، ج (١، ٦)

بالمحددات أولاً

وبالقانون / $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ والمساحة بالمحددات هي:



$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{array} \right| \frac{1}{2} \pm = \text{المساحة}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{array} \right| \frac{1}{2} \pm = \left| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{array} \right| \frac{1}{2} \pm =$$

$$\{4 - 8 - \} \frac{1}{2} \pm = \{(2) 2 - - (4 -) (2) \} \frac{1}{2} \pm =$$

$$\{4 - 8 - \} \frac{1}{2} \pm = \{(2) 2 - - (4 -) (2) \} \frac{1}{2} \pm = \{12 - \} \frac{1}{2} \pm =$$

أما الحل بالقانون:

$$\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{(2^2 - 1^2) + (4^2 - 2^2)} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

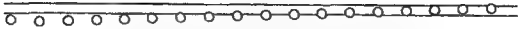
$$\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = \sqrt{29}$$

$$\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{29} = \sqrt{29}$$

$$\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = \sqrt{29}$$

$$\sqrt{2^2 + 4^2} + \sqrt{5^2 + 2^2} + \sqrt{5^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2} + \sqrt{5^2 + 2^2} + \sqrt{5^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{29} + \sqrt{29} + \sqrt{29}}{2} = \frac{3\sqrt{29}}{2}$$

$$\sqrt{2^2 + 4^2} + \sqrt{5^2 + 2^2} =$$



$$\sqrt{(27-57)(27)(27)(27+57)} = \text{المساحة}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 18 \times 2 = (2 - 20) 2 =$$

$$6 = 3 \times 2 = \text{مساحة وحدات}$$

الجواب نفسه في الطريقتين.

مثال (٩):

أوجد مجموعة الحل للنظام بطريقة كرامر:

$$(1) \quad s - v = 1$$

$$(2) \quad 3s + 4v = 5$$

$$3 + 4 = (3)(1) - (4 \times 1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = |A|$$

$$v =$$

$$s = \frac{\text{بالتوابت}}{\text{بالتوابت}}$$

$$(1) (4) - (1) (5) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = |A|$$

$$4 + 1 =$$

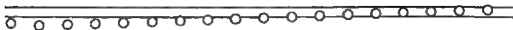
$$s = \frac{\text{بالتوابت}}{\text{بالتوابت}}$$

$$(1) (5) - (4) (3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = |A|$$

$$\frac{4 + 1}{v} = \frac{|A|}{|A|} = s$$

$$\frac{5 - 12}{v} = \frac{|A|}{|A|} = v$$

$$\left\{ \frac{5 - 12}{v}, \frac{4 + 1}{v} \right\} = \text{مجموعة الحل}$$



مثال (١٠):

إذا كانت $S = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أوجد: (١) $S \cdot C$ (٢) $C \cdot S$

$$(i) \quad S \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 28 & 21 \\ 2 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$1 \times 3 = 3 \times 1$$

أما (ii) $C \cdot S$

$$\begin{bmatrix} 7 & 28 & 21 \\ 2 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 3 = 3 \times 1$$

طبعاً $S \cdot C \neq C \cdot S$ ولكن ليس هذا فحسب وإنما الفارق هائل جداً!!!

مثال (١١):

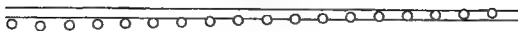
$$\begin{vmatrix} 12 & 17 \\ 15 & S \end{vmatrix} = \text{ما قيمة } S \text{ في المصفوفة؟}$$

إذا كان $|A| = 192$

الحل:

$$192 = (12 \times S) - (15 \times 17) = \begin{vmatrix} 12 & 17 \\ 15 & S \end{vmatrix} = |A|$$

المصفوفات والمحددات



$$\text{أي } 255 - 12 = 192$$

$$- 12 = 255 - 192$$

$$- 12 = 63 -$$

$$= \frac{63}{12} = \frac{21}{4}$$

مثال (١٢):

$$\text{ما قيمة لك التي تجعل المصفوفة } \begin{pmatrix} 3 & (3+ك) \\ (3+ك) & 3 \end{pmatrix} \text{ منفردة؟}$$

$$\text{حتى تكون } \frac{1}{2 \times 2} \text{ منفردة يجب أن تكون } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر هكذا:}$$

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} 3 & (3+ك) \\ (3+ك) & 3 \end{vmatrix} \leftarrow \text{صفر} = (3+ك)(3+ك) - 3 \times 3 = \text{صفر}$$

$$\text{أي } (3+ك)^2 - 9 = 0 \text{ صفر وتحليلها الى فرق بين مربعين}$$

$$(3+ك) - 3 = 0 \text{ صفر}$$

$$ك = 0$$

$$\text{ك = صفر أولاً}$$

$$ك = 6 \text{ ثانياً.}$$

مثال (١٣):

إذا كانت إيرادات ثلاث سلع منتجاتها شركة مقدره بالدنانير هي:

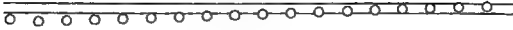
$$2500, 3200, 4500$$

وكانت تكاليف انتاج هذه السلع بالدنانير وعلى الترتيب هي:

$$1700, 2000, 2400$$

احسب صافي أرباح الشركة في كل سلعة باستخدام المصفوفات.





بما أن الأرباح = الإيرادات - التكاليف

$$\text{مصفوفة الإيرادات} \begin{pmatrix} 2500 \\ 3200 \\ 4500 \end{pmatrix} = {}^A_3 \times {}^1_1 \quad \text{فإن الإيرادات المصفوفة}$$

$$\text{مصفوفة التكاليف} \begin{pmatrix} 1700 \\ 2000 \\ 2400 \end{pmatrix} = {}^B_3 \times {}^1_1$$

$$\text{مصفوفة الربح: } \begin{pmatrix} 800 \\ 1200 \\ 2100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1700 \\ 2000 \\ 2400 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2500 \\ 3200 \\ 4500 \end{pmatrix} = {}^C_3 \times {}^1_1$$

مثال (١٤):

(i) حل النظام: $2س - 3ص + ع = 3$

$$8 = ع + 2ص - 3س$$

$$15 = 3س + 4ص - ع$$

بطريقة كريمر.

الحل بطريقة كريمر:

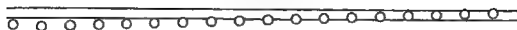
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = |A|$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 =$$

$$2 = 2(-) + (1)(3) + (6)(1) = 2 - 3 + 6 = 5$$

$$2 = (2)(-1) + (5)(3) + (6)(2) = -2 + 15 + 12 = 25$$

$$25 = 2 - 15 + 12 =$$



$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 8 \\ 1 & -4 & 10 \end{vmatrix} = |M_s|$$

$$(30 - 32) 1 + (30 + 8 -) 3 + (8 + 2 -) 2 - =$$

$$(2) (1) + (22) (3) + (6) (2 -) =$$

$$0 = 2 + 66 + 18 - =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -8 & 1 \\ 1 & -10 & 3 \end{vmatrix} = |M_{s'}|$$

$$(24 - 10) 1 + (6 + 1 -) 3 + (30 + 8 +) 2 =$$

$$(9 -) 1 + (0) 2 + (22) 2 =$$

$$0 = 9 - 09 = 9 - 10 + 44 =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \end{vmatrix} = |M_{s''}|$$

$$(6 - 4) 3 - (24 - 0) 2 + (32 - 30) 2 =$$

$$(2 -) (3) - (9 -) (2) + (2 -) (2) =$$

$$20 - = 6 + 27 - 4 - =$$

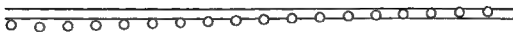
$$1 - = \frac{20 -}{20} = ع، \quad 2 = \frac{0}{20} = ص، \quad 3 = \frac{0}{20} = \frac{|M_s|}{|M|} = س$$

مجموعة الحل = $\{(1, 2, 3)\}$ بطريقة كريمة

(ii) حل النظام: $2 - = ع + ص + س$

$$2 = ع + 3 - ص$$

بعمليات الصف البسيط $2 = ع + 3 + ص$



الحل:

نبدأ بكتابة المصفوفة الموسعة:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \text{س} & 0 & 0 & 1 \\ \text{ص} & 0 & 1 & 0 \\ \text{ع} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{الشكل}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad (2-)$$

عندها مجموعة الحل = { (س، ص، ع) }

كما يلي:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}-}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{11}-}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{13}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{5-}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{2}{1}-}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 1 = 1 \text{ ص} , 2 = 1 \text{ ص} , 1 = 1 \text{ ع} , 1 = 1 \text{ ع}$$

مجموعة الحل = $\{(1, 2, 2)\}$

مثال (١٥):

ما قيمة س التي تحقق المساواة بين المصفوفتين:

$$\begin{pmatrix} 2 \text{ س} & 0 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \text{ س} & 4 \text{ س} \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفتين متساويتان فإن مدخلاتها المتناظرة متساوية

$$\therefore 2 \text{ س} - 4 \text{ س} = \text{صفر} \quad (1) \quad \text{و} \quad 2 \text{ س} = 2 \text{ س}$$

$$\text{س} (2 - 4) = \text{صفر}$$

$$\text{س} (\text{س} + 2) (\text{س} - 2) = \text{صفر}$$

$$\{2, 2, 2\} \quad \cap \quad \{2, 2, 2\}$$

\therefore قيم س التي تحقق المساواة هما:

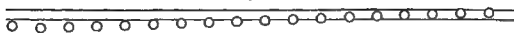
$$= \{2, \text{صفر}\} \text{ فقط}$$

حيث $2 = 2$ لا تحقق المساواة.

مثال (١٦):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 2 \times 2$$

إذا كان ذلك ممكناً أوجد:



$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (i)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (ii)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad (iii)$$

$$2 \times 2 \quad (iv)$$

الحل:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 2 \\ 2 \times 2 & 0 \times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(10)(9) - (6)(6) =$$

$$171 - 120 - 36 =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 10+4 \\ 4+10 & 10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 19 \\ 19 & 0 \end{pmatrix} =$$

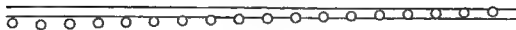
=

مثال (١٧):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$





الحل:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 17 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -62 & 8+1 \\ 9+8 & 12 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} 2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 17 & 8 \end{pmatrix} = \text{الطرف الأيمن}$$

= الطرف الأيسر.

مثال (١٨):

ما قيمة كل من أ ، ب إذا كان:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & - \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 6 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & - \end{pmatrix}$$



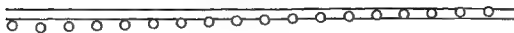
$$\begin{matrix} \text{ع} & = & \text{ص} & \cdot & \text{س} \\ 2 \times 2 & = & 2 \times 2 & \cdot & 3 \times 2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 18 & -13 & 4 \\ 0 & 5 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 18 & -13 & 4 \\ 0 & 5 & - & 0 \end{pmatrix} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & - \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 18 & -13 & 4 \\ 0 & 5 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 18 & -13 & 4 \\ 0 & 5 & - & 0 \end{pmatrix}$$

وبما أن المصفوفتين متساويتان فإن مدخلاتهما المتناظرة متطابقة أو متساوية.

المصفوفات والمحددات



$$٤ = أ \leftarrow ١٢ = أ٣ \leftarrow (١) \quad ٢ = ١٤ - ١٣ \therefore$$

$$(٢) \quad ٢ = ١٠ + ب٣ \leftarrow ١٨ = ب٣ \leftarrow ٦ = -$$

$$\therefore ٤ = أ$$

$$\therefore ٦ = - ب$$

مثال (١٩):

اكتب مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت والمصفوفة الموسعة للنظام:

$$٥ = ع - ٢ ص$$

$$١ = ع + ٢ ص$$

$$ص + ع = صفر$$

$$\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ١ \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix} = \frac{١}{٣ \times ٣} \text{ مصفوفة المعاملات:}$$

$$\begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \\ ٠ \end{pmatrix} = \frac{ب}{١ \times ٣} \text{ مصفوفة الثوابت:}$$

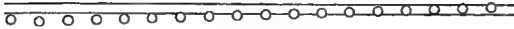
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} ٥ & ١ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & ١ & -٢ \\ ٠ & ١ & ١ & ٠ \end{array} \right) \xrightarrow{=} \text{المصفوفة الموسعة:}$$

مثال (٢٠):

اكتب قيمة كل من المدخلات التالية ج١١ ، ج١٢ ، ج١٣ ، ج١٤

$$\begin{pmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ٧ & ٠ & ٥ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٢ \end{pmatrix} = \text{عندما } \xrightarrow{=}$$





الحل:

$$\begin{pmatrix} (3 -) - 0 & (2 -) - 1 & (1 -) - 3 \\ 7 - 4 & 0 - 5 & 5 - 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{ج}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 - 5 & 2 - \end{pmatrix} = \frac{\underline{\underline{ج}}}{2 \times 2}$$

والآن: ج_{١١} المدخلة في الصف الأول والعمود الأول = ٤

ج_{١٢} المدخلة في الصف الثاني والعمود الثاني = ٥

ج_{١٣} المدخلة في الصف الثاني والعمود الثالث = ٣ -

ج_{١٤} المدخلة في الصف الثالث والعمود الثاني = ϕ

(حيث لا يوجد صف ثالث في المصفوفة ج)

(٧ - ٧) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

$$(1) \text{ أوجد محدد المصفوفة } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

$$(2) \text{ أوجد ناتج جمع } \begin{pmatrix} 2 & 1 & - \\ 2 & & 0 \\ 2 & 0 & - \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(٣) حل المعادلة المصفوفية:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & - \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س & ص \\ ل & ع \end{pmatrix}$$

(٤) اكتب النظير الضربي للمصفوفة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 21 & 21 \\ 2 & 6 \\ 22 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

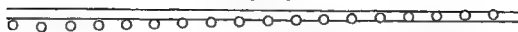
(٥) حل المعادلة المصفوفية:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} س & 2 \\ ص & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \text{ إذا كانت } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

$$\frac{هـ}{2 \times 2} = \frac{و}{2 \times 2} + \frac{١٢}{2 \times 2} - \frac{٢١}{2 \times 2}$$

حيث $\frac{و}{2 \times 2}$ مصفوفة الوحدة ، $\frac{هـ}{2 \times 2}$ المصفوفة الصفرية



(٧) أجز عمليات الضرب التالية إذا كانت ممكنة:

$$(1) \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & - \\ 4 & 6 & - \end{pmatrix}$$

$$\{ \text{غير ممكنة} \} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} (2)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} (3)$$

$$(8) \text{ أوجد حاصل ضرب } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(٩) باستخدام طريقة كريمر لحل المعادلات الخطية، ما قيمة كل من س ، ص

فيما يلي؟

$$(1) \quad 5 = \frac{1}{ص} + \frac{1}{س}$$

$$(2) \quad \text{صفر} = \frac{2}{ص} - \frac{2}{س}$$

$$\{ \text{ارشاد: افرض } 1 = \frac{1}{س}, 2 = \frac{1}{ص} \}$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

(١٠) أوجد مجموعة الحل للنظام بالمحددات (طريقة كريمر):

$$س + 2ص = 4$$

$$س - 4ص + ع = 1$$

$$2س + ص - 3ع = \text{صفر}$$

$$\left\{ \left(\frac{13}{21}, \frac{17}{21}, \frac{50}{21} \right) \right\}$$



(١١) أوجد حاصل ضرب المحددين:

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

{ ١١ }

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{b}{2 \times 2}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

أوجد أ + ب ، أ - ب ، أ · ب

(١٣) ما مساحة المثلث الذي رؤوسه أ (١ ، ٢) ، ب (٠ ، ٥) ، ج (-٨ ، ٤)

{ ٣٥,٥ وحدة مساحة }

(١٤) أوجد مجموعة الحل للنظام ٥ س - ٢ ص + ١٤ = صفر

س + ٤ ص - ٣٢ = صفر

بطرق مختلفة كالمحددات والحذف والتمويض...

$$\left\{ \left(-\frac{87}{11}, \frac{4}{11} \right) \right\}$$

(١٥) ما قيمة س ، ص اذا كانت:

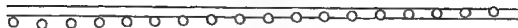
$$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{ 0, 2 \} \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \times 2}$$

فما قيمة كل من المدخلات التالية:

أ_{١١} ، أ_{١٢} ، أ_{٢١} ، أ_{٢٢} ، أ_{٣١} ، أ_{٣٢}

{ ٢ ، ٤ ، ٧ ، ١ ، -٦ }



(١٧) حل المعادلات المصفوفية التالية:

$$\begin{pmatrix} ٧ & ٣ & ٥ \\ ٨ & ٧ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ & س-١ \\ ٨ & ١+ص & ٤ \end{pmatrix} \quad (١)$$

$$\begin{pmatrix} ٤ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢س+ص \\ ٣س-ص \end{pmatrix} \quad (٢)$$

$$\{(٢, ١)\}, \{٣, ٤-\}$$

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٧ & ٦ & ٥ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢ \times ٢} \text{ إذا كانت } (١٨)$$

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٨ \end{pmatrix} = \frac{ب}{٢ \times ٢}$$

$$\begin{pmatrix} ٧ & ٦ & - \\ ٤ & ٢ & - \end{pmatrix} = \frac{ج}{٢ \times ٢}$$

أوجد أ + ب ، أ - ب ، أ · ج ، ج · أ ، ج · ٥ ، إذا كان ذلك ممكناً

$$\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix} = \frac{ص}{٢ \times ٢} , \begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix} = \frac{س}{٢ \times ٢} \text{ إذا كانت } (١٩)$$

أوجد $س^٢$ ، $ص^٢$ ، $س^٢ + ص^٢$ ، $ص^٢ - س^٢$ ، $ص \cdot س$ ، $س \cdot ص$

(٢٠) أي من المصفوفات التالية منفردة ولماذا؟

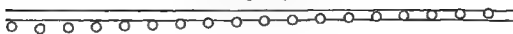
$$\begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix} = \frac{ب}{٢ \times ٢} , \begin{pmatrix} ٢ & ٩ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢ \times ٢}$$

$$\begin{pmatrix} ٣٧ & ٥ \\ ٣٧ & ٤ \end{pmatrix} = \frac{د}{٢ \times ٢} , \begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ٦ & ٤ \end{pmatrix} = \frac{ج}{٢ \times ٢}$$

{ المصفوفة $\frac{ب}{٢ \times ٢}$ لأن محددها = صفر }

$$\begin{pmatrix} ١+ج & ١+ج & ١+ج \\ ج & ب & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix} \text{ منفردة } (٢١) \text{ يبين أن المصفوفة}$$

{إرشاد: محددها = صفر}



(٢٢) إذا كانت المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ متفردة فما قيمة s ؟
 $\left\{ ٢, -\frac{٢}{٣} \right\}$

(٢٣) حل النظام: $s + ٢ = ٧$

بعمليات الصف البسيط $٢s + ٥ = ٣$

$\{ (١٧, -٤) \}$

(٢٤) أجز عملية ضرب كل من المصفوفتين إذا كان ذلك ممكناً.

(١) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

{ ارشاد: الأولى ممكن والثانية لا }

(٢٥) محل تجاري يبيع ثلاثيات وتلفزيونات، باع في الأسبوع الأول من عام ٢٠٠٥م ثلاث ثلاثيات وأربعة تلفزيونات، وفي الأسبوع الثاني باع أربع ثلاثيات وخمسة تلفزيونات، وفي الأسبوع الثالث باع ٧ تلفزيونات، وفي الأسبوع الرابع باع ثمانى ثلاثيات. رتب هذه المعلومات في مصفوفة.

{ ارشاد: هناك مصفوفتان لترتيب هذه المعلومات }

(٢٦) ما عدد مدخلات كل من المصفوفات:

$\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = ٢ \times ٢$, $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٦ & ٣ \\ ٧ & ٠ \end{pmatrix} = ٣ \times ٢$, $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ & ٤ \\ ١ & ٣ & ٥ \end{pmatrix} = ٢ \times ٣$

(٢٧) حل المعادلة المصفوفية الآتية:

$\begin{pmatrix} ٤ & ١٤ \\ ٧ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣s + ٤ \\ ٥ + s & ١ \end{pmatrix}$

$\{ ٢, ٤ \}$

(٢٨) إذا كانت المصفوفة $\underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ تمثل أثمان بيع كل وحدة من أربع سلع متمثلة بالدنانير، فإذا ارتفعت تكاليف إنتاج الوحدة من كل سلعة حسب مدخلات المصفوفة $\underline{C} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ اكتب المصفوفة التي تمثل أثمان البيع الجديدة لهذه السلع.

{ ارشاد: ارتفاع تكاليف الإنتاج ينعكس على اثمان البيع }

$$(٢٩) \text{ إذا كانت } \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & - \\ 3 & 4 & - \end{bmatrix} \text{ ما قيمة } |1| \underline{A}, |1| \underline{A}, |1| \underline{A}$$

$$\text{وإذا كانت } \underline{B} = \begin{bmatrix} 7 & - & 6 & 1 \\ 8 & - & 5 & 2 \\ 9 & - & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ ما قيمة } |B|, |B|, |B|$$

$$(٣٠) \text{ ما قيم } \underline{A} \text{ في المصفوفة } \underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ إذا كان } |M| = \text{صفر}$$

$$(٣١) \text{ إذا كانت } \underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 1 & - \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ أوجد: } \underline{A} \cdot \underline{B}, \underline{B} \cdot \underline{A}$$

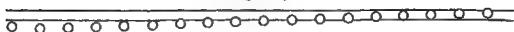
(٣٢) حل أنظمة المعادلات الخطية التالية بعمليات الصف البسيط أو بطريقة كرامر.

$$(١) \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ (2) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ 7x - 4y = 11 \end{cases}$$

$$(٣٣) \text{ ما قيم } K \text{ في المصفوفة } \underline{A} = \begin{bmatrix} K & K \\ K & 2 \end{bmatrix} \text{ المنفردة؟}$$

$$\{2, 0\}$$



(٣٤) احسب قيمة كل من المحددات:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad (2)$$

{ صفر ، - ٢٧ }

(٣٥) حل المعادلتين ٢س + ٣ص = ٨

٧س - ٥ص = -٣ بالمحددات.

{ (٢ ، ١) }

(٣٦) حل المعادلات الثلاث:

$$٣س + ٤ص + ع = ٥$$

$$٥س - ٦ص - ع = -٣$$

$$-٤س + ٥ص + ع = ١$$

بالمحددات

{ (١ ، ٢ ، ٥) }

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{ب}{١ \times 2} , \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{١}{2 \times 1}$$

أوجد ١٠ ب ، ١٠ ب إذا كان ذلك ممكناً.

(٣٨) حل المعادلة المصفوفية:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & س \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$



(٣٩) أوجد حاصل ضرب:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

الاقتارات الجبرية

Algebraic Functions

(٨ - ١) الأنماط Patterns

الأنماط ومفردها نمط والنمط هو النسق أو المنوال أو الأسلوب الذي تسير بمقتضاه في انجاز معظم أعمالنا اليومية، فالجميع منا نحن البشر بالذات يأكل ويشرب وينام ويكتب في بعض الأحيان، فعمليات الأكل والشرب والنوم والكتابة جميعها بلا استثناء تسير على أنماط، وكأنها مؤثرات على سريان الحياة في أجسامنا كونها تنفي عنا جمود الفناء، هذا من ناحية عامة.

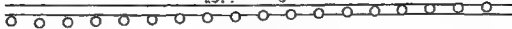
أما في الرياضيات فالأنماط هي الموضوعات الرياضية الهامة لأنها تسير بطرق يمكن تحديدها بقواعد رياضية ليسهل علينا التعامل معها وتفسيرها بأسلوب صحيح كونها تكشف لنا علاقات الربط بين المتغيرات وما ينتج عنها من قوانين واقتراحات.

مثال:

إذا حددت إدارة المرور في إحدى البلدان أجرة الراكب في الحافلات العمومية المنتشرة هناك من خلال عداد الحافلة، بحيث تبدأ دورة العداد بـ ٢٥ قرشاً عند ركوب الشخص في الحافلة، ويضاف بعد ذلك ١٥ قرشاً لقاء كل كيلومتر واحد تقطعه الحافلة بانتظام.

من هذه المعلومات يمكن التعرف على مقدار أجرة الراكب وفق الجدول التالي، ككون القاعدة تسير على نمط وحيد هو:

المسافة المقطوعة بالكيلومتر	أجرة الراكب بالقرش
١	$١ + ٢٥ = (١٥) ٤٠$ قرشاً
٢	$٢ + ٢٥ = (١٥) ٥٥$ قرشاً
٣	$٣ + ٢٥ = (١٥) ٧٠$ قرشاً
⋮	
س	$س + ٢٥ = (١٥) ١٥ + ٢٥$ س قرشاً



وهذه هي القاعدة الناتجة عن النمط السابق.

وكان الأنماط تؤول في نهايتها الى علاقات بين المتغيرات. وهنا وفي هذا السؤال بالذات؛ هناك علاقة بين المسافة المقطوعة بالكيلومترات وأجرة الراكب بالقروش، اكتشفت بنتيجة النمط السابق.

لذا فالأنماط تنتج من القواعد ما نطلق عليها "الاقتدرات"

فالنمط السابق أنتج الاقتران التالي:

$$ق (س) = ٢٥ + ١٥ س$$

حيث: س عدد الكيلومترات المقطوعة

ق (س) قيمة الأجرة المدفوعة.

فأجرة الراكب على سبيل المثال عندما يقطع ٧ كيلومترات بالحافلة نفسها هي:

$$ق (٧) = ٢٥ + ١٥ (٧) = ١٣٠ \text{ قرشاً.}$$

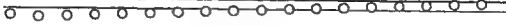
وهكذا....

(٨- ٢) الاقتران الجبري Algebraic Function:

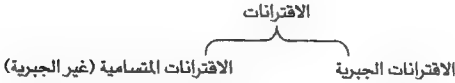
الاقتدرات الجبرية التي نحن بصدد مناقشتها الآن، تُعتبر ركيزة أساسية من ركائز الرياضيات كونها المادة الخام لموضوعات متعددة وهامة في الرياضيات كالمتتاليات والمتسلسلات والتفاضل والتكامل وغيرها من الموضوعات، كما سيتضح فيما بعد، وفي هذا المؤلف بالذات.

من المعروف أن الاقتران علاقة بين عناصر مجموعتين، يرتبط فيها كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى تُسمى (المجال Domain) بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية تُسمى (المدى Range).

والاقتدرات التي مجالها ومداهها مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية ح يطلق عليها اسم الاقتدرات الحقيقية Real Functions ، والاقتدرات الجبرية ما هي إلا



قسمٌ هام جداً من أقسام الاقترانات الحقيقية بموجب التقسيم التالي:



والاقترانات الجبرية هي الاقترانات التي ترتبط فيها المتغيرات (س ، ص) مثلاً بعلاقة تتمثل بقاعدة هي: $ص = ق (س)$

حيث س يُسمى المتغير المستقل ، ص يسمى المتغير التابع

وتتضمن الاقترانات الجبرية الأنواع التالية من الاقترانات:

كثيرات الحدود

اقترانات القيمة المطلقة

اقتران أكبر عدد صحيح أو الدرجي أو السُّلّمي

اقترانات نسبية

اقترانات مجذورة

وسنناقش جميع هذه الأنواع في هذا الفصل بالذات.

وأما الاقترانات المتسامية أو غير الجبرية فتتضمن الأنواع التالية من الاقترانات:

الاقترانات الدائرية: وهي التي ترتبط بالزوايا ارتباطاً وثيقاً

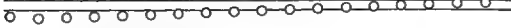
والاقترانات الأسية: وعلى وجه الخصوص الاقترانات الأسية الطبيعية للأساس

هـ (العدد النابيري) فقاعدته ق (س) = هـ^س

والاقترانات اللوغارتمية: وعلى وجه الخصوص الاقترانات اللوغارتمية الطبيعية

للأساس هـ (العدد النابيري) وقاعدته ق (س) = لورس

وسنناقشها في أماكنها من هذا المؤلف، لذا وجب التنويه.



(٨ - ٣) أنواع الاقتارات الجبرية Types of Algebra Functions:

(i) كثيرات الحدود Polynomial Functions:

كثيرات الحدود مجموعة من الاقتارات الحقيقية الجبرية والتي تشترك جميعها بالصورة العامة الواحدة للقاعدة التالية:

$$ق(س) = أ_٠ س^٠ + أ_١ س^١ + أ_٢ س^٢ + \dots + أ_١ س^١ + أ_٠ س^٠$$

لكل ن عدد صحيح غير سالب (صفر وموجب)

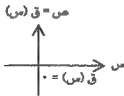
والأعداد الحقيقية $أ_٠, أ_١, أ_٢, \dots, أ_١$ تسمى المعاملات Coefficient

والقوى powers أو الأسس Indices ن ، ن-١ ، ن-٢ ، ... ، ١ ، ٠ تحدد درجات Degrees هذه الاقتارات.

هذا وتصنف كثيرات الحدود الى الاقتارات التالية:

× الاقتاران الصفري Zero Function:

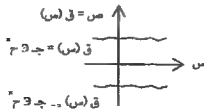
قاعدته ق(س) = صفر ، ومنحناه محور السينات بالذات ، ولا درجة له على الاطلاق، كما في الشكل:

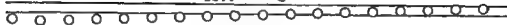


× الاقتاران الثابت Constant Function:

قاعدته ق(س) = ج ، لكل ج ح

ومنحناه يمثل مستقيماً يوازي محور السينات ويبعد عنه بمقدار ج وحدة ومن الدرجة الصفرية كما في الشكل:

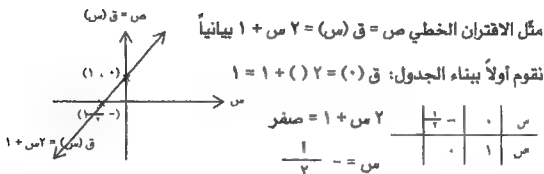




× الاقتران الخطي Linear Function:

قاعدته ق (س) = أ س + ب ، لكل أ ، ب $\in \mathbb{R}$ ، $أ \neq 0$ ومن الدرجة الأولى
كون أكبر قيمة للأس فيه هو ١ صحيح ومنحناه مستقيم تمثله كما في الجدول
التالي:

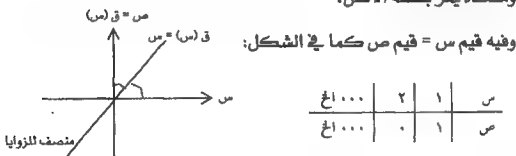
مثال:



وكحالة خاصة من الاقتران الخطي هناك الاقتران المحايد Identity Function:

قاعدته ق (س) = س

ومنحناه يمر بنقطة الأصل،



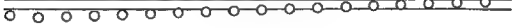
وللاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب صفات ندونها على الصفحات

التالية:

بما أن الاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب ، $أ \neq 0$ صفر يمثل بيانياً على
المستوى الديكارتي بخط مستقيم على الصورة:

$$ق = م س + ج$$

الاقترانات الجبرية



فإن:

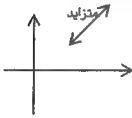
(١) ميل الاقتران الخطي هو ١ كونها يناظر ميل المستقيم $ص = م س + ج$ وهو م

(هندسة تحليلية) فميل الاقتران الخطي ق (س) = $٣ س - ٤$ هو ٣

وميل الاقتران الخطي هـ (س) = $٨ - ٦ س$ هو - ٦

(٢) اذا كان $أ < ٠$ صفر يكون ق (س) متزايد، أي أن قيمة الاقتران ق (س) تزداد

بزيادة قيمة س



مثل: ق (س) = $٣ س + ج$ ،

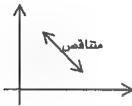
$$ق (١) = ٣ + (١) ج = ٨$$

$$ق (٢) = ٥ + (٢) ج = ١١$$

أي أن س تزداد من ١ الى ٢ ، ق (س) تزداد أيضاً من ٨ الى ١١

(٣) وإذا كان $أ > ٠$ صفر يكون ق (س) متناقص، أي قيمة الاقتران ق (س) تقل

بزيادة قيمة س



مثل: ق (س) = $٣ - ٥ س$

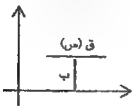
$$ق (١) = ٣ - ٥ = (١) ج = ٢$$

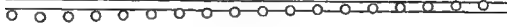
$$ق (٢) = ٣ - ٥ = (٢) ج = ١$$

أي أن بزيادة س من ١ الى ٢ تقل قيمة الاقتران من ٢ الى ١

(٤) وعندما $أ = ٠$ صفر فالاقتران ق (س) = $أ س + ب$ يتحول الى الاقتران الثابت

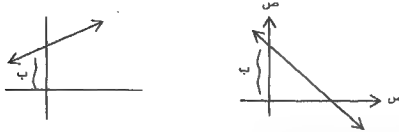
ق (س) = ب ويصبح لا متزايد ولا متناقص كما في الشكل:





(٥) والاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب فإن ب تسمى مقطعه الصادي هكذا:

حيث ص = م س + ج أي أن ب = ج المقطع الصادي كما في الشكلين:



فالمقطع الصادي للاقتران ق (س) = ٣ س + ٥ هو ٥

فالمقطع الصادي للاقتران هـ (س) = ٥ - ٣ س هو ٥ أيضاً

هذا وسنناقش موضوع التزايد والتناقص بالتفصيل في مكان آخر من هذا

المؤلف وفي فصل "التفاضل" انشاء الله القدير!!!

× الاقتران التربيعي Quadratic Function:

قاعدته ص = ق (س) = أ س^٢ + ب س + ج لكل أ ، ب ، ج ≠ ٠ ، أ ≠ صفر

ومن الدرجة الثانية لأن أكبر أس للمتغير فيه هو ٢

ومنحناه يُمثل بيانياً بشكل قطع مكافئ Parabola (سيأتي بحثه بالتفصيل

في فصل القطوع المخروطية انشاء الله) ويكون منحناه مفتوح للأعلى هكذا ∪

عندما تكون إشارة أ موجبة (معامل س^٢) ومفتوح للأسفل هكذا ∩ عندما تكون

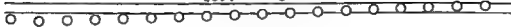
إشارة أ سالبة (معامل س^٢).

وتسمى أعلى نقطة بمنحناه أو أوطأ نقطة برأس القطع المكافئ مثل:



حيث أ (س_١ ، ص_١) رأس القطع المكافئ في الشكلين.

الاقتارات الجبرية



مثال:

$$\text{الاقتار ق (س)} = \text{س}^2 + 2\text{س} - 3$$

اقتار تربيعي من الدرجة الثانية ولرسم منحناه نعين احداثيات رأسه Vertex والتمثلة بالنقطة:

$$\left(\frac{-\text{ب}}{2\text{ا}}, \frac{-\text{ب}^2}{4\text{ا}} \right) \text{ هكذا:}$$

الصورة العامة لقاعدته ق (س) = $\text{ا} \text{س}^2 + \text{ب} \text{س} + \text{ج}$

$$\text{وهو ق (س)} = \text{ا} \text{س}^2 + 2\text{س} - 3$$

$$\therefore \text{ا} = 1, \text{ب} = 2, \text{ج} = -3$$

$$\text{الاحداثي السيني للرأس} = \frac{-\text{ب}}{2\text{ا}} = \frac{-2}{1 \times 2} = -1$$

والآن نقوم ببناء الجدول التالي:

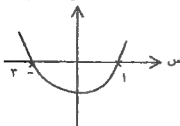
س	3-	2-	الرقم	0	1
ق (س)	صفر	3-	4-	3-	صفر

من الملاحظ أن ق (3-) = (1) = $\text{ا} \text{س}^2 + 2\text{س} - 3 = 1 - 3 + 3 = 1$ صفر للتماثل المار هو

$$\text{ق (2-)} = (0) = \text{ا} \text{س}^2 + 2\text{س} - 3 = 0 - 3 + 3 = 0 \text{ الرأس}$$

$$\text{ق (1-)} = (1) = \text{ا} \text{س}^2 + 2\text{س} - 3 = 1 - 3 + 3 = 1$$

ص = ق (س)



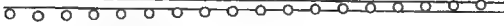
ومنحناه كما في الشكل

ملحوظة:

يمكن أن يكون منحنى الاقتار التربيعي - القطع المكافئ - مفتوحاً

لليمين هكذا () أو لليسار () عند استبدال س بالمتغير ص





كما يلي: $s = a^2 + b^2 + c^2 + \dots$ وحسب الإشارة أيضاً

فإذا كانت إشارة a موجبة فهو مفتوح لليمين (∞)

وإذا كانت إشارة a سالبة فهو مفتوح لليسار $(-\infty)$

هذا وسيأتي بحث ذلك بالتفصيل لاحقاً كما أسلفنا في فصل "القطع المخروطية".

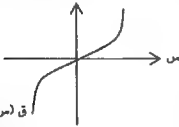
× الاقتراح التكميلي Cubic Function:

قاعدته $q(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$ لكل $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$ صفر

ومن الدرجة الثالثة لأن أكبر أس للمتغير s فيه $= 3$ ومنجناه يمثل بيانياً بواحد

من الشكلين \sim أو \sim - كما سيأتي لاحقاً - $q(s)$



لكن منحنى $q(s) = s^3$ هو

وهناك العديد من اقتراعات كثيرات الحدود ذات الدرجات المنوعة

كالرابعة مثل $q(s) = s^4$ ، والخامسة مثل $q(s) = s^5$ والسادسة وغيرها ... ،

ولكننا سنكتفي بما أوردناه منها فقط.

هذا ويتساوى كثيرا الحدود، إذا كانا من نفس الدرجة وكانت معاملتهما

المتناظرة متساوية كذلك مثل:

مثال:

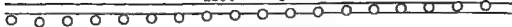
لو نظرنا الى الاقتراعين $q(s) = (s+2)^2$

هـ $q(s) = s^2 + 4s + 4$

نظرة فاحصة وسألنا أنفسنا هذا السؤال: ما العلاقة بين قاعدتي الاقتراعين؟

سيكون الجواب: علينا أن نضع القاعدتين بصورة واحدة هكذا.

الاقتارات الجبرية



$$ق(س) = (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) = (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢)$$

$$= س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) = س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) = س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢)$$

$$= س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) = س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) = س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢)$$

$$= س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) = س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) = س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢)$$

$$لكن هـ (س) = س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) = س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) = س^٢ (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢)$$

∴ ق(س) ، هـ (س) اقتاران متساويان.

وبما أن مجال كثيرات الحدود دائماً الأعداد الحقيقية فإن تساوي كثيري الحدود ق(س) ، هـ (س) يتم إذا كان لها نفس الدرجة وكانت معاملات قوى س المتناظرة فيها متساوية مثل ق(س) = س^٢ + ٥س + ٤ ، هـ (س) = س^٢ + ٤س + ٥ س^٢ ويعد وضع كلاً منها على الصورة العامة.

مثال:

$$إذا كان ق(س) = أ س^٢ + (ب - س) س^٢ + ٢$$

$$هـ (س) = - ٥ س^٢ + ٢ س^٢ + ٢$$

متساويين فما قيم كل من أ ، ب؟

$$بما أن ق(س) = هـ (س)$$

فإن المعاملات المتناظرة متساوية

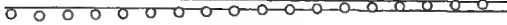
$$أي أن أ = - ٥ معامل س^٢ المتناظران$$

$$وكذلك ب - ٢ = ٢ ← ب = ٢$$

(ii) الاقتاران المتشعب Piecewise Function:

هو الاقتران الجبري الذي تتغير قاعدته وفقاً لقيم المتغير س في مجموعات جزئية من مجالها ، ولذا يكون له أكثر من قاعدة كما يلي:





مثال:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق (س)} = \left. \begin{array}{l} \text{س}^2, \text{ س} \leq \text{صفر} \leftarrow \text{القاعدة الأولى} \\ \text{س}, \text{ س} > \text{صفر} \leftarrow \text{القاعدة الثانية} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

هذا ويسمى العدد صفر نقطة تغيير بالتعريف.

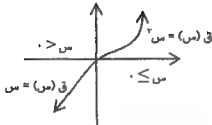
والملاحظ أن مجال الاقتران في القاعدة الأولى هو: $[-\infty, 0]$



ومجال الاقتران في القاعدة الثانية هو: $[0, \infty]$

لذلك يكون مجال ق (س) هو $(-\infty, \infty)$

$$\text{ح} = (-\infty, \infty) =$$



ومنحناه كما في الشكل:

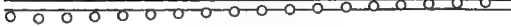
(iii) اقتران القيمة المطلقة Absolute value Function:

أو كما يسميه بعض الرياضيين اقتران القيمة الموجبة.

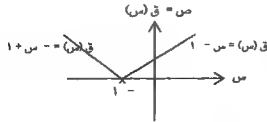
ومثاله: ق (س) = $|س + 1|$ ولتمثيل منحناه بيانياً يجب اعادة تعريفه ليصبح اقتران متشعب كما يلي:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق (س)} = \left. \begin{array}{l} \text{س} + 1, \text{ س} + 1 \leq \text{صفر} \\ \text{س} - 1, \text{ س} - 1 > \text{صفر} \end{array} \right\} \leftarrow \left. \begin{array}{l} \text{س} + 1, \text{ س} + 1 \leq \text{صفر} \\ \text{س} - 1, \text{ س} - 1 > \text{صفر} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$





أو نجد صفراً: $س + ١ = \text{صفر} \leftarrow س = -١$



(iv) اقتاران أكبر عدد صحيح Greater Integer Function:

أو كما يسميه البعض الاقتاران الدرجي أو السلمى Step Function

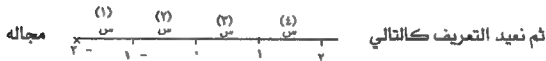
قاعدته $ق(س) = [س]$ ولتمثيل منحناه يجب إعادة تعريفه وبالشكل العام:

[ب] $\leftarrow ن \geq س > ن - ١$ حيث $ن$ عدد صحيح

وعندها $س = ن$ عند كل درجة من الدرجات التي تكون منحناه.

ولرسم منحنى $ق(س) = [س]$ المعروف على الفترة $[-٢, ٢]$ نقول:

$$١ = \frac{١}{١} = \frac{١}{|معامل س|} = \text{نجد طول الدرجة}$$



حيث الدائرة ٥ في الرسم	$٢ \geq س > ١$	،	$٢ -$	} = ق(س)
معناها أنها لا تنتمي الى	$١ \geq س > ٠$	،	$١ -$	
الاقتاران مثلاً: $ق(٢) = ٢$	$٠ \geq س > -١$	،	٠	
ولا تساوي ١ إطلاقاً	$١ \geq س > -٢$	،	١	
"من الرسم"	$س = ٢$	،	٢	

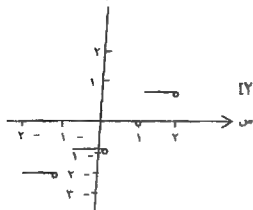
الاقتراانات الجبرية



من = ق (س)

وعندما تكون إشارة من سالبة

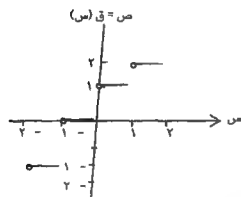
فالمنحنى يصبح معكوساً



لرسم منحنى ق (س) = - [س] على [س] على [٢ ، ٢]

هكذا

بعد إعادة تعريفه:



$$\left. \begin{array}{l} 2 - = س ، 2 - \\ 1 - > س > 2 - ، 1 - \\ 0 \geq س > 1 - ، 0 \\ 1 \geq س > 0 ، 1 \\ 2 \geq س > 1 ، 2 \end{array} \right\} = ق (س)$$

(٧) الاقتران النسبي Rational Function:

هو الاقتران المعروف على شكل كسر يشمل بسطاً ومقاماً.

مثال:

$$ق (س) = \frac{س - 1}{س^2 + 1} \text{ ومجاله ح}$$

ومجال الاقتران النسبي هو ح - {أصفار الاقتران ، أصفار مقامه}

مثلاً:

$$\text{مجال الاقتران ق (س) = } \frac{1}{س} \text{ هو ح - } \{0\}$$

ويكتب هكذا: ق (س) = $\frac{1}{س}$ ، س \neq صفر

الاقتارات الجبرية

ومجال ق (س) = $\frac{1}{1-s}$ ، بعد أن نجد أصفار الاقتران ، الصفر مقامه

$$1-s = \text{صفر}$$

$$1-s = \text{صفر الاقتران}$$

∴ مجال ق (س) = $\frac{1}{1-s}$ ، $s \neq 1$ ، وهكذا..

(vi) × الاقتران المجذور والتحديد:

- اقتران الجذر التربيعي Square Root Function:

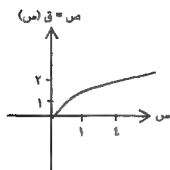
مثال:

ق (س) = \sqrt{s} ، دليله 2 ، ومجاله $s \leq \text{صفر}$

أي مجاله الأعداد الحقيقية الموجبة والصفر أيضاً.

حيث الأعداد السالبة ليس لها جذر تربيعي حقيقي بل ركب -لنا بصده الآن- ومداه الصفر والأعداد الموجبة فقط.

مثال:



ارسم منحنى الاقتران ق (س) = \sqrt{s}

س	0	1	4
ق (س)	0	1	2

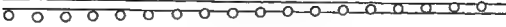
$$ق(0) = \sqrt{0} = \text{صفر}$$

$$ق(1) = \sqrt{1} = 1$$

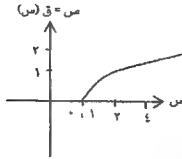
$$ق(4) = \sqrt{4} = 2$$

ومجال الاقتران ق (س) = $\sqrt{1-s}$ هو $s - 1 \leq \text{صفر}$

$$أي s \leq 1$$



ومنحناه:

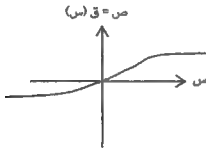


× اقتران الجذر التكعيبي Cubic Root Function:

مثال:

ق (س) = $\sqrt[3]{س}$ دليله ٣ مجاله ح حيث العدد السالب = الموجب والصفر كلاهما

لهما جذر تكعيبي.



ومنحناه

س	١~	٠	١
ق(س)	١~	٠	١

وأخيراً لا تنسى أن $\sqrt[3]{س} = |س|$ لذا تنفي التويه

ويشكل عام مجال الاقتران ق (س) = $\sqrt[3]{س}$ هو

× س ≤ صفر عندما ن زوجي مثل $\sqrt[4]{س}$ ، $\sqrt[6]{س}$ ، $\sqrt[8]{س}$ ، ...

× ح عندما ن فردي مثل $\sqrt[3]{س}$ ، $\sqrt[5]{س}$ ، $\sqrt[7]{س}$ ، ...

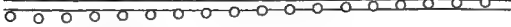
(-٨ - ٤) اشارة الاقتران الجبري Sign of Algebraic

نظراً لأهمية اشارة الاقتران عند تعيين مجاله وتمثيله البياني بشكل عام

فإننا سنبحث اشارة الاقترانات من حيث هي موجبة أو سالبة أو كليهما كما يلي:

- اشارة الاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب ، نجد صفره.

الاقترانات الجبرية



وصفره يسمى العدد الحرج وهو العدد الذي عنده يغير الاقتران من اشارته:

$$أ س + ب = \text{صفر} \leftarrow أ س - ب = \text{صفر} \leftarrow س = \frac{ب}{1} \text{ صفر أو عدده الحرج}$$

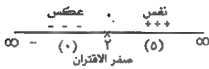
$$\text{فتكون اشارته} \quad \begin{array}{c} \text{نفس} \quad \text{عكس} \\ \infty - \quad \frac{ب}{1} - \quad \infty \end{array}$$

نفس اشارة أ عندما $س < \frac{ب}{1}$ أو تعويض بعدد أكبر من صفر أو العدد الحرج
الاقتران

عكس اشارة أ عندما $س > \frac{ب}{1}$ أو تعويض بعدد أصغر من صفر العدد الحرج
الاقتران

مثال:

أوجد اشارة ق (س) $س = ٢ - ٤$



$$س = ٢ - ٤ = \text{صفر} \leftarrow س = ٢ \text{ صفر الاقتران}$$

أو نعوض العدد ٥ أكبر من صفر الاقتران

$$ق (٥) = (٥) ٢ - ٤ = ١٠ - ٤ = ٦ \text{ موجب كما في الشكل}$$

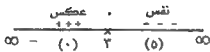
وكذلك نعوض ٠ أصغر من صفر الاقتران

$$ق (٠) = (٠) ٢ - ٤ = ٠ - ٤ = -٤ \text{ سالب كما في الشكل}$$

مثال:

أوجد اشارة ق (س) $س = ٣ - ٩$

$$س = ٣ - ٩ = \text{صفر} \leftarrow س = ٣$$

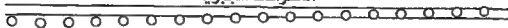


أو التعويض بالعدد ١٥

$$ق (١٥) = (١٥) ٣ - ٩ = ٤٥ - ٩ = ٣٦ \text{ موجب}$$

$$ق (٠) = (٠) ٣ - ٩ = ٠ - ٩ = -٩ \text{ سالب}$$

الاقترانات الجبرية

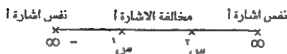


~ إشارة الاقتران التربيعي ق (س) = أ^٢ س + ب س + ج

وتعتمد اشارته على قيمه مميزة ب^٢ - ٤ أ ج

فإذا كان ب^٢ - ٤ أ ج < صفريه صفران

واشارته تكون كما يلي:



مثال:

ما إشارة ق (س) = س^٢ - ٥ س + ٦

$$١ = أ$$

$$٥ = ب$$

$$٦ = ج$$

ب^٢ - ٤ أ ج = ٥ - ٢(٥) = ٥ - ١٠ = -٥ < ٠ موجب

س^٢ - ٥ س + ٦ = صفر

(س - ٢) (س - ٣) = صفر

الجنران

س_١ = ٢ ، س_٢ = ٣



وإذا كان ب^٢ - ٤ أ ج = صفر له صفر مكرر وكأنه واحد ، وتكون اشارته

نفس إشارة أ إلا عند صفريه فلا قيمة له.

مثال:

ما إشارة ق (س) = س^٢ - ٤ س + ٤

$$١ = أ$$

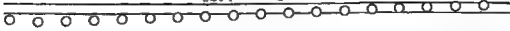
$$٤ = ب$$

$$٤ = ج$$

ب^٢ - ٤ أ ج = ٤ - ٢(٤) = ٤ - ٨ = -٤ < ٠ صفر



الاقتران الجبرية



فإشارته نفس إشارة أ وهي موجبة

وإذا كان ب^٢ - أ ج > صفر فإن إشارته نفس إشارة أ كونه لا أ صفر حقيقية له

مثال:

$$\text{ما إشارة ق(س)} = \text{س}^2 + 2\text{س} + 5 \quad 1 = 1$$

$$\text{ب} = 2$$



$$\text{ج} = 5$$

$$\text{ب}^2 - 2\text{أ} = 4 - 2(2) = 4 - 4 = 0 \quad \text{صفر} \quad \text{هناك موجب}$$

أما بقية كثيرات الحدود فإننا نقسمها بالضرب إلى اقترانات خطية وتربيعية بواسطة التحليل ثم نضرب الاشارات كما يلي:

$$\text{ما إشارة ق(س)} = \text{س}^2 - 1$$

$$\text{س}^2 - 1 = (\text{س} - 1)(\text{س} + 1)$$

$$\text{س} - 1 = \text{صفر} \quad \text{إشارة} \quad \text{س} + 1 = \text{صفر}$$

$$\text{إشارة} \quad \text{س}^2 + 1 = \text{صفر}$$

$$\text{وبالضرب إشارة} \quad \text{س}^2 - 1 = \text{صفر}$$

~ إشارة الاقتران النسبي: نجد إشارة البسط وإشارة المقام ونجري عملية قسمة الاشارات كضربها بالتتام.

مثال:

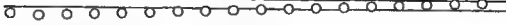
$$\text{ما إشارة ق(س)} = \frac{\text{س}^3 - 5}{\text{س}^2 - 2} \quad \frac{0}{2} \neq$$

$$\text{إشارة البسط} \quad \text{س}^3 - 5 = \text{صفر}$$

$$\text{إشارة المقام} \quad \text{س}^2 - 2 = \text{صفر}$$

$$\text{إشارة ق(ر)} \quad \text{س}^3 - 5 = \text{صفر}$$





وهكذا فإننا نعلم على إشارة الاقترانات الخطية والتربيعية في إيجاد إشارة الاقترانات النسبية وكثيرات الحدود الأخرى بواسطة التحليل إلى العوامل.

× قيمة الاقتران الجبري Value Of Function :

سأناقش فيما يلي كيفية إيجاد قيمة الاقتران عند أي نقطة في مجاله، وبطريقة التعويض المباشر دون تبسيط أو اختصار على الإطلاق، هذا إذا علمت قيمة المتغير فيه وعلم مجاله أيضاً.

ومجال كثيرات الحدود دائماً الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها إلا إذا عُرفت على فترات أو مجموعات مخالفة وتكون معرفة عندما $s \in \mathbb{C}$

مثال:

$$\text{إذا كان } q(s) = s^2 - 5s + 4$$

أوجد $q(-1)$ ، $q(0)$ ، $q(1)$ أي قيمة الاقتران عندما $s = -1$ ، 0 ، 1 ، صفر ،

$$q(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 4 = 10$$

$$q(0) = (0)^2 - 5(0) + 4 = 4$$

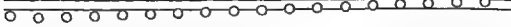
$$q(1) = (1)^2 - 5(1) + 4 = \text{صفر}$$

وعند إيجاد القيمة العددية للاقتران عند أي نقطة يجب أن تنتمي هذه النقطة إلى مجاله، لذا يجب معرفة المجال أولاً ثم القيمة كما في الأمثلة التالية:

~ كثيرات الحدود معرفة لكل $s \in \mathbb{C}$ أي أن مجالها \mathbb{C} دائماً إلا إذا عرفت بطريقة تُخرج بعض النقاط من مجالها.

~ الاقترانات النسبية معرفة شرط أن المقام \neq صفر لذا فللاقتران قيمة عددية دائماً إلا عند أصفار مقامه كما يلي:

$$\text{إذا كان } q(s) = \frac{s^2}{s - 4} \quad \text{فإن مجاله } \mathbb{C} - \{4\}$$



~ الاقترانات التي تحتوي جذراً دليلاً زوجي كالجذر التربيعي مثلاً ما يداخل الجذر يجب أن يكون موجباً أو صفرًا ولا يساوي كمية سالبة.

فمجاله: داخل الجذر \leq صفر

مثال:

$$\sqrt{s-2}$$

المجال: $s-2 \leq$ صفر $\leftarrow s \leq 2$

أي أن مجاله $s \leq 2$ أو يشكل فترة $(-\infty, 2]$

إذ لا جذر حقيقي دليلاً زوجي لكمية سالبة.

والتفسير: $\sqrt{s-2} = 1$ ، $\sqrt{s-2} = -1$ ليس عدد حقيقي بل مركب كما سيأتي.

أما الاقتران الذي يحتوي جذراً دليلاً فردي فمجاله دائماً ح الأعداد الحقيقية مثل الجذر التكعيبي، إذ يوجد جذر حقيقي يجمع الأدلة الفردية.

مثال:

$$\sqrt[3]{s-2}$$

(٨-٦) جبر الاقترانات:

أو كيفية إجراء العمليات الخمس التالية:

The Sum الجمع (مجموع)

The Diggerence الطرح (الفرق)

The Product الضرب

The Quotient القسمة

The Combining التركيب

على الاقترانات الجبرية

وبعد اجراء العمليات السابقة يجب تحديد مجالات هذه الاقتترانات الناتجة عن تلك العمليات.

(i) يُعرّف مجموع الاقتترانين ق (س) ، هـ (س) بأنه (ق + هـ)(س) أو (ق + هـ)(س) الذي تكون صورة كل عنصر (س) في مجاله مساوية لمجموع صورتَي (س) في الاقتترانين المذكورين.

مثال:

$$\begin{aligned} \text{إذا كان ق (س) = س}^2, \text{ هـ (س) = } \frac{1}{1-س}, \text{ س} \neq 1 \\ \text{فإن ق (س) + هـ (س) = (س) = (ق + هـ)(س) = } \frac{1 + (1-س)^2 س}{1-س} = \frac{1}{1-س} + \frac{س^2}{1-س} = \frac{1 + س^2 - 2س + 1}{1-س} = \frac{2 - 2س + س^2}{1-س} \\ \text{وكذلك هـ (س) + ق (س) = (س) = (ق + هـ)(س) = } \frac{1 + س^2 - 2س + 1}{1-س} = \frac{2 - 2س + س^2}{1-س} \\ \text{ولما كان ق (س) + هـ (س) = (س) = (ق + هـ)(س)} \end{aligned}$$

فالضرب تبديلي

وللتحقق:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1 + 4 - 8}{1} = \frac{1 + 2(2) - 2(2)}{1 - 2} = (2) = (ق + هـ)(2) \\ 0 &= \frac{1 + 4 - 8}{1} = \frac{1 + 2(2) - 2(2)}{1 - 2} = (2) = (ق + هـ)(2) \end{aligned}$$

* ويُعرّف الفرق بين الاقتترانين ق (س) ، هـ (س) بأنه (ق - هـ)(س) أو (ق - هـ)(س) الذي تكون فيه صورة كل عنصر (س) في مجاله مساوية للفرق بين صورتَي (س) في الاقتترانين المذكورين.

مثال:

$$\text{إذا كان ق (س) = س}^2, \quad \text{هـ (س) = } \frac{1}{1 - \text{س}}, \quad \text{س} \neq 1$$

$$\text{فإن ق (س) - هـ (س) = (ق - هـ) (س) = } \frac{1}{1 - \text{س}} - \frac{\text{س}^2}{1} = \frac{1 - \text{س}^2(1 - \text{س})}{1 - \text{س}} =$$

$$\text{س} \neq 1 = \frac{1 - \text{س}^2 + \text{س}^3}{1 - \text{س}} =$$

$$\text{وكذلك هـ (س) - ق (س) = (هـ - ق) (س) = } \frac{\text{س}^2}{1} - \frac{1}{1 - \text{س}} = \frac{\text{س}^2(1 - \text{س}) - 1}{1 - \text{س}} =$$

$$\text{س} \neq 1 = \frac{\text{س}^2 - \text{س}^3 + 1}{1 - \text{س}} = \frac{-1 - \text{س}^2 + \text{س}^3}{1 - \text{س}} =$$

ولما كان ق - هـ (س) \neq هـ - ق (س)

فالطرح غير تبديلي

وللتحقق:

$$\text{ق - هـ (2) = } \frac{1 - 4 - 8}{1} = \frac{1 - 2^2 - 2^3}{1 - 2} = (2) \text{ق - هـ (2)}$$

$$\text{و هـ - ق (2) = } \frac{8 - 4 + 1}{1} = \frac{2^3 - 2^2 + 1}{1 - 2} = (2) \text{هـ - ق (2)}$$

* يُعرّف حاصل ضرب الاقترانين ق (س) ، هـ (س) بأنه ق . هـ (س) أو هـ - ق (س)

الذي تكون فيه صورة كل عنصر (س) في مجاله مساوية لحاصل ضرب

صورتي (س) في الاقترانين المذكورين.

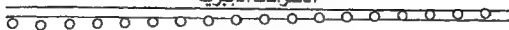
$$\text{فإن إذا كان ق (س) = س}^2, \quad \text{هـ (س) = } \frac{1}{1 - \text{س}}, \quad \text{س} \neq 1$$

$$\text{ق (س) . هـ (س) = (ق . هـ) (س) = } \left(\frac{1}{1 - \text{س}} \right) (\text{س}^2) = \frac{\text{س}^2}{1 - \text{س}}, \quad \text{س} \neq 1$$

$$\text{وكذلك هـ (س) . ق (س) = (هـ - ق) (س) = } \left(\frac{\text{س}^2}{1 - \text{س}} \right) (\text{س}^2) = \frac{\text{س}^4}{1 - \text{س}}, \quad \text{س} \neq 1$$

ولما كان ق (س) . هـ (س) = هـ - ق (س)

فالضرب تبديلي



$$\text{وللتحقق (ق ٠ هـ)} (٢) = (٢) \left(\frac{١}{١ - ٢} \right) (٢) = (٤) (٤) = ٤$$

$$\text{و (هـ ٠ ق)} (٢) = (٢) \left(\frac{١}{١ - ٢} \right) (٢) = (٤) (٤) = ٤$$

* يُعرّف خارج قسمة الاقتراانين (ق (س) ، هـ (س) كل منهما على الآخر كما يلي:

$$\frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}} = \left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}} \right) (\text{س}) ، \text{هـ (س)} \neq \text{صفر}$$

ومجاله ، مجال ق (س) ٨ مجال هـ (س) - {أصفار و (س)}

$$\text{أو } \frac{\text{هـ (س)}}{\text{ق (س)}} = \left(\frac{\text{هـ}}{\text{ق}} \right) (\text{س}) ، \text{ق (س)} \neq \text{صفر}$$

ومجاله ، مجال هـ (س) ٨ مجال ق (س) - {أصفار ق (س)}

$$\text{إذا كان ق (س) = س}^٢ ، \text{هـ (س)} = \frac{١}{١ - \text{س}} ، \text{س} \neq ١$$

$$\text{فإن } \frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}} = \left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}} \right) (\text{س}) = \text{س}^٢ + \frac{١}{١ - \text{س}} = \left(\frac{\text{س}^٢}{١} \right) \left(\frac{١ - \text{س}}{١} \right)$$

$$\text{س}^٢ - \text{س}^٢ = ٠ ، \text{س} \neq ١ \text{ ومجاله ح} - \{١\}$$

$$\text{وكذلك } \frac{\text{هـ (س)}}{\text{ق (س)}} = \left(\frac{\text{هـ}}{\text{ق}} \right) (\text{س}) = \frac{١}{١ - \text{س}} + \text{س}^٢$$

$$= \left(\frac{١}{١ - \text{س}} \right) \left(\frac{١}{١ - \text{س}} \right) = \frac{١}{(١ - \text{س})^٢}$$

$$\text{س}^٢ - \text{س}^٢ \neq \text{صفر} \text{ :مجاله}$$

$$\text{س}^٢ (\text{س}^٢ - ١) \neq \text{صفر}$$

$$\text{س} (\text{س} - ١) \neq \text{صفر}$$

$$\text{س} \in \{١ ، ٠\}$$

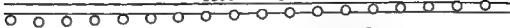
$$\text{ومجاله} \text{ ح} - \{١ ، ٠\}$$

وفي هذا السياق سنوضح بالتفصيل عملية تركيب الاقتراانات كما يلي:

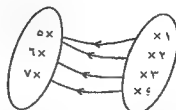
من المعلوم أن الاقتران هو ارتباط بين عناصر مجموعتين بحيث يرتبط كل

عناصر في مجاله بصفر واحد وواحد فقط في مداه هكذا:

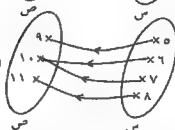




هذا مخطط سهي للاقتران ق (س)



وهذا مخطط سهي للاقتران هـ (س)



من المخططين السهنيين السابقين يمكن تكوين اقران جديد على النحو:

$$١ \text{ ق (س) } \leftarrow ٥ \text{ هـ (س) } \leftarrow ٩ \text{ ويرمز لهذه العملية بالرمز هـ (ق) } ٩ = (١)$$

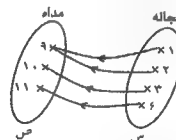
$$٢ \text{ ق (س) } \leftarrow ٥ \text{ هـ (س) } \leftarrow ٩ \text{ ويرمز لهذه العملية بالرمز هـ (ق) } ٩ = (٢)$$

$$٣ \text{ ق (س) } \leftarrow ٦ \text{ هـ (س) } \leftarrow ١٠ \text{ ويرمز لهذه العملية بالرمز هـ (ق) } ١٠ = (٣)$$

$$٤ \text{ ق (س) } \leftarrow ٧ \text{ هـ (س) } \leftarrow ١١ \text{ ويرمز لهذه العملية بالرمز هـ (ق) } ١١ = (٧)$$

وبهذه العملية قد عرفنا اقتران جديد يسمى اقتران مركب من ق (س) ، هـ (س)

ويرمز له بالرمز (هـ ٥ ق) (س)



ويقرأ الاقتران المركب هكذا:

$$\text{هـ ل ق (س) } = \text{هـ (ق) (س) } = (\text{هـ ٥ ق) (س)}$$

والآن سنقوم بعملية تركيب الاقترانات ميكانيكياً كما يلي:

$$\text{اذا كان ق (س) } = \text{س}^٢ \text{ ، هـ (س) } = \frac{١}{١ - \text{س}} \text{ ، س} \neq ١$$

فإن (ق ٥ هـ) (س) ويُقرأ (ق بعد هـ) (س)

الاختراعات الجبرية

$$١ \neq س، \frac{١}{١ + س^٢ - س} = ر(\frac{١}{١ - س}) = (\frac{١}{١ - س}) ق = ((س) هـ) ق =$$

وكذلك (هـ ق) (س) = هـ (ق (س)) = هـ (س ر)

$$1 \neq \pm 1, \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} =$$

وبما أن (ق ٥ هـ) (س) \pm (هـ ٥ ق) (س) وكما هو واضح في المثال:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{1-2(2)} = \text{كون (هـ ٥ ق) (2)}$$

وكذلك (هـ ٥ ق) (٢) = ق (هـ ٢) = $\left(\frac{1}{1-2}\right)$ ق = (١) = ${}^2(1) = 1$

هذا ويمكن إيجاد قيم المتغيرس بمعرفة (ق ٥ هـ) (س) ، أو (هـ ٥ ق) (س)

كما في المثال:

مثال:

إذا كان q (س) $= s^2 + 1$ ، هـ (س) $= 3s$ أوجد قيم s في الحالتين

عندما (i) (ق ٥ هـ) (س) = ١٠ ، وعندما (ii) (هـ ٥ ق) (س) = ١٠

الحالة الأولى: (ق ٥ هـ) (س) = ق (هـ س) = ق (٣ س) = ١٠ = ١ + ٢ (٣ س)

$$\therefore 10 = 1 + 9 \text{ من } 9 \leftarrow 10 = 1 + 9 \text{ من } 9 \text{ صفر}$$

$$9 \text{ س } 9 - 2 = \text{صفر} \leftarrow \text{س } 1 - 2 = \text{صفر (س } + 1) (\text{س } - 1) = \text{صفر}$$

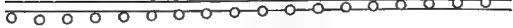
$$\therefore \pm = \pm$$

الحالة الثانية: $(هـ ٥ ق) (س) = هـ (ق/س) = هـ (س^2 + 1) = ٣ (س^2 + 1) = ١٠$

$$10 = 3 + {}^2_3 \leftarrow 10 = 3 + {}^2_3$$

$$3\text{س}^2 - 7 = \text{صفر} \leftarrow (7\sqrt{\text{س}} + \sqrt{3\text{س}})(7\sqrt{\text{س}} - \sqrt{3\text{س}}) = \text{صفر}$$

س = $\pm \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$ لاحظ تباين الأجوبة في الحالتين.



(٨- ٧) الاقتران العكسي Inverse Function:

من المعلوم أن ق،(س) = { (١ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٨) ، (٤ ، ٦) } اقتران
لعدم تكرار المسقط الأول-

مجاله المجموعة أ، = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } المساقط الأولى

ومداه المجموعة ب، = { ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٦ } المساقط الثانية

والآن اذا استبدلنا مداه بمجاله والعكس، فهل الناتج اقتران أيضاً؟

لنرى: هل:

هـ، (س) = { (٥ ، ١) ، (٧ ، ٢) ، (٨ ، ٣) ، (٦ ، ٤) } اقتران؟

الجواب: نعم كون المسقط في جميع الأزواج المرتبة لم يكرر.

* من المعلوم أيضاً أن ق،(س) = { (١ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٨) ، (٤ ، ٦) } اقتران
لعدم تكرار المسقط الأول-

مجاله المجموعة أ، = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }.

ومداه المجموعة ب، = { ٥ ، ٦ ، ٨ }

وإذا استبدلنا مداه بمجاله والعكس، فهل الناتج اقتران أيضاً؟

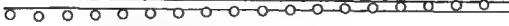
لنرى هل:

هـ، (س) = { (٥ ، ١) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٨ ، ٤) } اقتران؟

الجواب: لا كون المسقط الأول ٦ تكرر في زوجين مرتبين هما (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣)

لذلك فالاستبدال -جعل المدى مجال والمجال مدى- ينتج أحياناً اقتران مثل
هـ،(س) وأحياناً أخرى لا مثل هـ،(س).

لنركز على نوع الاقتران ق،(س) والذي عكسه (بعد استبدال المساقط) اقتران؟



ق_١ (س) اقتران واحد لواحد كون أي من المساقط الثانية لا تتكرر في الأزواج المرتبة.

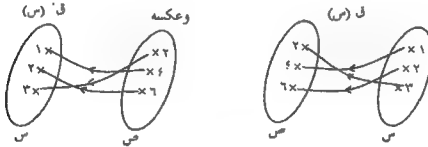
ولأن كل عنصر في مداه هو صورة لعنصر واحد فقط في مجاله.

وبالرموز، لكل $s_1 \neq s_2$ في مجاله \leftarrow فإن $q(s_1) \neq q(s_2)$

وأما الاقتران ق_٣ (س) والذي عكسه (بعد استبدال المساقط) ليس اقتران بل علاقة فقط، فهو اقتران ليس واحد لواحد.

لذا فالأقتران الذي عكسه اقتران يجب أن يكون اقتران واحد لواحد.

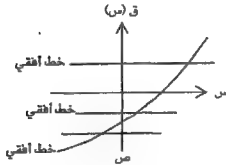
فإذا كان ق (س) اقتران واحد لواحد، فإن الاقتران العكسي له يرمز له بالرمز ق^{-١} (س) والشكل يوضح الاقتران.



والآن ما الذي يُحدد فيما إذا كان ق (س) اقتران عكسي ق^{-١} (س) أم لا؟

انه اختبار الخط الأفقي للتأكد من أن ق (س) هو اقتران واحد لواحد،

ليكون له اقتران عكسي ق^{-١} (س).



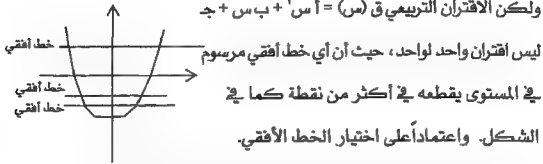
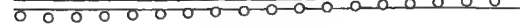
فالأقتران الخطي ق (س) = أ س + ب

اقتران واحد لواحد حيث أن أي خط

مرسوم في المستوى لا يمكن أن يقطعه

بأكثر من نقطة كما في الشكل.

الاقتراانات الجبرية



ويمكن القول أن الاقتراانات الخطية والتعكيبية اقتراانات واحد لواحد ولها
اقتراانات عكسية وأن الاقتراانات التربيعية ليست اقتراانات واحد لواحد وليس لها
اقتراانات عكسية.

والآن العملية الميكانيكية لإيجاد الاقتران العكسي ق¹ (س).

وعند إيجاد ق¹ (س) لأي اقتران واحد لواحد فإننا نسترشد بالقاعدة التالية:

$$ق(ه ق^1(س)) = ق(ق(ه ق(س))) = س$$

كون صورة العنصرين تركيب الاقتران ومعكوسه مساوية للصفر نفسه.

مثال:

$$\{(1, 1), (2, 8), (3, 27)\} = ق(س) \text{ وللتأكد من ذلك افرض أن } ق(س) = \{(1, 1), (2, 8), (3, 27)\}$$

فإن ق¹(س) = $\{(1, 1), (2, 8), (3, 27)\}$ بعد استبدال المسافات الأولى
بالثانية.

$$ومنها ق(2) = 8, ق^1(8) = 2$$

$$\text{لأي } ق(ه ق^1(2)) = ق(2) = 8 \text{ نفس العدد}$$

$$\text{وكذلك } ق(ق^1(8)) = ق(8) = 2 \text{ نفس العدد}$$

$$\text{أي أن } ق(ه ق^1(ق(ه ق(س)))) = ق(ق(ه ق(ق(ه ق(س)))) = س$$

مثال:

إذا كان ق(س) = $2س + 5$ أوجد اقتراانه العكسي إذا كان له اقتران عكسي؟

يمكن ايجاد ق^١ (س) بطريقتين:

الأولى: تطبيق القاعدة (ق ٥ ق^١) (س) = ق (ق^١ (س)) = س

الأولى: (هـ ٥ هـ^١) (س) = هـ (هـ^١ (س)) = س من القاعدة

أي أن: (هـ^١ (س))^٢ = ٣

ومنها وبأخذ الجذر التكعيبي للطرفين:

$$\sqrt[3]{\text{هـ}^{\frac{1}{2}}(\text{س})} = \sqrt[3]{\text{س}}$$

$$\text{هـ}^{\frac{1}{2}}(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{س}} \quad \text{الاقتران العكسي للاقتران هـ (س)}$$

الثانية: نفرض ص = هـ (س)

$$\text{ص} = \text{ص}^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{\text{ص}} = \sqrt[3]{\text{ص}^{\frac{2}{3}}} \quad \text{بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين}$$

$$\sqrt[3]{\text{ص}} = \text{ص}$$

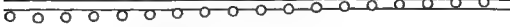
$$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{ص}} \quad \text{ثم نبديل المسميات س بديل ص والعكس صواب}$$

$$\text{هـ}^{\frac{1}{2}}(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{ص}} \quad \text{الاقتران العكسي للاقتران هـ (س)}$$

والجواب بالطريقتين واحد وصواب.

(٨ - ٨) قسمة كثيرات الحدود:

نعود ثانية الى كيفية اجراء عملية القسمة وبطريقتين في الاقتراانات وعلى وجه الخصوص كثيرات الحدود، لنستطيع مناقشة نظريتي الباقي والعوامل وكيفية تحليل الاقتراانات الى عواملها الأولية في فصول أخرى من هذا المؤلف، وللتوصل الى كيفية حل المعادلات في الاقتراانات بأنواعها في حقل الأعداد الحقيقية.



عملية القسمة في الاقترانات الجبرية وكثيرات الحدود بوجه خاص تتم بطريقتين هما:

الطريقة الأولى: القسمة الطويلة (Longe Division) أو خوارزمية - تكرار خطوات العملية - القسمة كونها تُنسب الى العالم العربي الخوارزمي (٧٨٠ - ٨٥٠م) والتي مفادها بإيجاد شديد:

إذا كان ق (س) ، هـ (س) اقترانين كثيري الحدود حيث هـ (س) \neq صفر

$$\text{فإن ق (س) + هـ (س) = } \left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}} \right) \text{ (س) واللذان يتتجان}$$

اقترانين كثير الحدود هما لك (س) = ر (س) بحيث أن

$$\text{ق (س) = هـ (س) } \cdot \text{ك (س) + ر (س) حيث } \cdot \geq \text{درجة (س) } \geq \text{هـ (س)}$$

وتتم عملية القسمة الطويلة بوضع الاقترانان (كثيرات الحدود) على شكل قسمة طويلة - كما في الأعداد الحقيقية - كما في الشكل:

عندها نُطلق على الاقترانات

المُسميات التالية:

$$\begin{array}{r} \text{ك (س)} \\ \text{ق (س)} \overline{) \text{ق (س)}} \\ \text{ر (س)} \end{array}$$

ق (س) يُسمى المقسوم

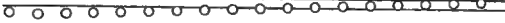
هـ (س) يُسمى المقسوم عليه

لك (س) يُسمى خارج القسمة (الجواب)

ر (س) يُسمى الباقي

ويجب ملاحظة أن: درجة هـ (س) المقسوم عليه + درجة لك (س) خارج القسمة

$$= \text{درجة ق (س) المقسوم.}$$



وهذا واضح من المثال التالي:

مثال:

$$\text{إذا كان ق (س) } = 3\text{س}^2 - 7\text{س} + 1$$

$$\text{هـ (س) } = 2 - \text{س}$$

أوجد خارج قسمة ق (س) على هـ (س) والباقي باستخدام القسمة الطويلة.

الخطوات بإيجاز شديد:

نقسم 3س^2 على $3 - \text{س}$

ثم نضرب 3س^2 في $(2 - \text{س})$ كاملاً

ثم نطرح كما في الشكل

ثم نكرر بأن نقسم $-7\text{س} + 1$ على $2 - \text{س}$

ثم نضرب $-7\text{س} + 1$ في $(2 - \text{س})$ كاملاً

ثم نطرح ونكرر حتى نصل إلى الباقي $3 -$

"يجب ملاحظة أن درجة الباقي (س) أقل من درجة المقسوم عليه هـ (س) $= 2 - \text{س}$ دائماً".

وكما هو واضح فإن خارج القسمة ك (س) $= 3\text{س}^2 - 7\text{س} + 1$

الباقي ر (س) $= 3 -$

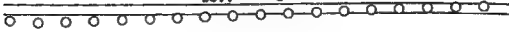
ويمكن وضع الافتراضات السابقة على الصورة:

ق (س) = هـ (س) · ك (س) + ر (س) كما في الأعداد الحقيقية

$$\text{حيث } 29 = (7) (4) + 1$$

أي أن درجة المقسوم = درجة خارج القسمة + درجة المقسوم عليه

$$\begin{array}{r} 7 \\ 4 \overline{) 29} \\ \underline{28} \\ 1 \end{array}$$



$$\text{حيث } (3) = (2) - (1)$$

وهذه العملية تسمى خوارزمية القسمة في الاقتارات الجبرية.

ودرجة ر (س) الباقي هي صفر كونه اقتران ثابت داخل من درجة المقسوم عليه
هـ (س)

مثال:

$$\begin{array}{r} 3 - س^2 \\ 2 + س^2 \overline{) 3 - س^2} \\ \underline{2 + س^2} \\ 1 - س^2 \\ \underline{1 - س^2} \\ 0 \end{array}$$

اقسم $3 - س^2$ بـ $2 + س^2$ بالقسمة الطويلة

الحل كما هو على اليسار ومنه:

$$\text{خارج القسمة} = 3 - س^2$$

$$\text{الباقي} = - 4 + س^6$$

وهكذا...

الطريقة الثانية: القسمة التركيبية Synthetic Division وهذه الطريقة في القسمة
تعتبر حالة خاصة لا تتم إلا إذا كان المقسوم عليه كثير حدود
خطي أي من الدرجة الأولى فقط.

نعم إنها عملية قسمة مختصرة لكثير حدود درجته أكثر من 1 على كثير
حدود من الدرجة الأولى.

ويكون المقسوم عليه وعلى الصورة العامة هـ (س) = س - أ كما في الخطوات
التالية:

مثال:

$$\text{اقسم } (2) \text{ بـ } (3) \text{ على } (س - 1) \text{ على } (3 - س)$$

نجد صفر المقسوم عليه هكذا س - أ = صفر ————— < س = أ حيث أ يسمى صفر س - أ

$$\text{ومنها س - 3 = صفر} \text{ ————— } < \text{س = 3 صفر المقسوم عليه}$$

الاقتراءات الجبرية

ثم نكتب معاملات حدود المقسوم مرتبة حسب قوى s التنازلية دون استثناء في حدوده كما يلي:

معامل المقسوم عليه	s^3	s^2	s	ال ثابت
(٣)	٢	٣	١٥-	١٦-
	↓	٦	٢٧	٣٦
	٢	٩	١٢	٢٠

والخطوات تتم كما يلي:

انزل معامل الحد الأول كما هو لأنه العامل الأول

ثم اضرب $2 \times 3 = 6$ وضعه تحت المعامل الثاني

ثم اجمع $2 + 6 = 9$

ثم اضرب $9 \times 3 = 27$ وضعه تحت المعامل الثالث

ثم اجمع $15 + 27 = 42$

ثم اضرب $12 \times 3 = 36$ وضعه تحت المعامل الرابع

ثم اجمع $16 + 36 = 52$ فيكون هو الباقي

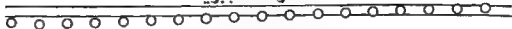
وبالإيجاز الشديد تتم عملية القسمة التركيبية، بإنزال معامل الحد الأول دائماً ثم الضرب والجمع حتى نتوصل الى الباقي. كما هو واضح أعلاه.

وحيث أن درجة خارج القسمة أقل بدرجة واحدة عن درجة المقسوم فإنه اقتران تربيعي يبدأ بـ s^2

∴ خارج القسمة $ك (س) = ٢ س^٢ + ٩ س + ١٨$ والباقي $ر (س) = ٢٠$ درجته أقل من درجة المقسوم عليه.

وهذا يطابق خوارزمية القسمة ، حيث:

ق (س) = هـ (س) ٠ ك (س) + ر (س)



أي أن:

$$٢ ص^٢ + ٣ ص - ١٥ ص - ١٦ = (٣ - ص) (٢ ص^٢ + ٩ ص + ١٨) + ٢٠$$

(تحقق من ذلك بالضرب)

مثال:

اقسم (ص - ٤ - ١٥ ص + ٢ ص - ٨) على (٤ + ص) بالقسمة التركيبية

نجد صفر المقسوم عليه: $ص + ٤ = \text{صفر} \leftarrow ص = -٤$

ثم نرتب كما في المثال السابق: وبما أن المقسوم عليه لا يحتوي على ص^٢

فإن معامل ص^٢ = صفراي ص^٢ وجب التويه

صفر المقسوم عليه	ص ^٤	ص ^٣	ص ^٢	ص ^١	ص ^٠ الثابت
(٤-)	١	٠	١٥-	٢	٨-
	↓	٤-	١٦	٤-	٨
	١	٤-	١	٢-	٠

وبأسلوب مماثل لما سبق فإن:

خارج القسمة ك (س) = ص^٢ - ٤ ص + ٢ ص - ٢ كون درجة خارج القسمة أقل بوحدة عن درجة المقسوم.

الباقير (س) = صفر

مثال:

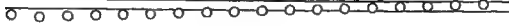
اقسم (٦ ص^٢ - ٢ ص - ١٨) على (٢ ص - ٤)

نجد صفر المقسوم عليه:

$$٢ ص - ٤ = \text{صفر} \leftarrow ٢ ص = ٤ \leftarrow ص = \frac{٤}{٢}$$



الاقتارات الجبرية



وبشكل عام نضع المقسوم عليه بصورة $أ س + ب = \text{صفر} \leftarrow أ س = - ب = - \frac{ب}{أ}$

ثم نرتب بأسلوب مماثل للمثالين السابقين هكذا:

صفر المقسوم عليه	$س^2$ س	س	من الثابت
(٢)	٦	٢-	٨-
	↓	١٢	٢٠
	٦	١٠	١٢

خارج القسمة $٦ س + ١٠$

الباقى $١٢ =$

(٨- ٩) نظريتنا الباقي والعوامل وتحليل كثيرات الحدود إلى عواملها الأولية:

نظرية الباقي Remainder Theorem:

نبدأ النقاش بهذا المثال:

مثال:

إذا كان $ق(س) = س^٤ + ٣ س^٢ - ٥ س + ٢$ و $٥ - س$

وكان $هـ(س) = س - ١$

أوجد باقى قسمة $ق(س)$ على $هـ(س)$ أى أوجد $ر(س)$

وهنا نثبه بأن المقسوم عليه $هـ(س)$ يجب أن يكون افتراضاً خطياً أى من

الدرجة الأولى وعلى الصورة $س - ١$ ،

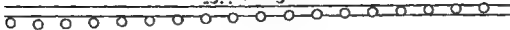
نقر ونعترف حتى طرح هذا السؤال (المثال) بأننا لا نستطيع إيجاد باقى

القسمة $ر(س)$ إلا بعد اجراء عملية القسمة بأحدى الطريقتين "الطويلة أو التركيبية"

ولكن بعد لحظات من طرح السؤال سوف نستطيع إيجاد الباقي $ر(س)$ مباشرة ومن

نظرية الباقي دون اجراء عملية القسمة على الاطلاق.





لنبدأ بعملية القسمة ولتكن القسمة التركيبية هكذا:

صفر المقسوم عليه: $س - ١ = \text{صفر} \leftarrow س = ١$				
(١)	$س^٤$	$س^٣$	$س^٢$	$س^١$
				س ^٠ الثابت
	١	٣	٥	٢
	↓	١	٤	١
	١	٤	١	١

الباقى ر (س) = ٤ - بعد اجراء عملية القسمة.

ولكن ما قيمة ق (١) حيث ١ هو صفر المقسوم عليه؟

$$ق(١) = (١) = ١ + ٣(١) + ٥(١) + ٢(١) - ٥ = ٤$$

الباقى: ر (س) = ق(١) حيث ١ صفر المقسوم عليه كما أسلفنا.

وهكذا: فإن باقى قسمة ق (س) على هـ (س) = س - أ هي ق (١)

وهذا هو منطوق نظرية الباقي وبشكل عام إن باقى قسمة ق(س) على

كثير الحدود الخطي هـ (س) = أ س + ب هي:

بعد ايجاد صفر المقسوم عليه: أ س + ب = صفر

$$أ س - ب$$

$$\frac{أ س - ب}{١} = ١$$

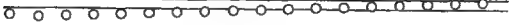
∴ الباقى ر (س) = ق $\left(\frac{أ س - ب}{١}\right)$ مباشرة ودون اجراء عملية القسمة اطلاقاً.

مثال:

أوجد باقى قسمة ق (س) = ٣ س^٤ - ٢ س^٣ + ١ س^٢ - ١ س + ١ على هـ (س) = ٢ س + ١

٢ س + ١ = صفر $\leftarrow ٢ س = -١ \leftarrow س = -\frac{١}{٢}$ صفر المقسوم عليه

$$\text{الباقى} ق = \left(-\frac{١}{٢}\right) ٣ \left(-\frac{١}{٢}\right) - ٤ \left(-\frac{١}{٢}\right) - ٢ - ١ + \left(-\frac{١}{٢}\right) = \frac{٣٥}{١٦}$$



مثال:

ما قيمة m التي تجعل باقي قسمة $(m + 3)س^2 + 5س + 1$

على $هـ (س) = س + 2$ هو العدد 6

الحل: صفر المقسوم عليه $= س + 2 = \text{صفر} \leftarrow س = -2$

الباقى: $ق (س) = (س + 3)س^2 + 5س + 1 = (س + 3)س^2 + 5س + 1 + (-2)س^2 - 4س + 4 = 6س^2 - 3س + 5$

$$6 = 1 + 4س - 12 + 10س + 6$$

ومنها $6 - 4س = 10س + 6$

$$-4س = 10س + 6 - 6$$

نظرية العوامل The Factors Theorem:

نبدأ بالمنطوق العام للنظرية:

يكون الاقتران الخطي $هـ (س)$ عامل من عوامل الاقتران $ق (س)$ اذا وفقط

إذا كان $ق (صفر الاقتران الخطي) = صفر$.

والتفسير:

يكون $هـ (س) = س - أ$ عامل من عوامل كثير الحدود $ق (س)$ اذا وفقط

إذا كان $ق (أ) = صفر$ والعكس أيضاً صواب.

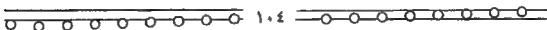
كما ويكون $هـ (س) = س + ب$ "الخطي" عامل من عوامل كثير الحدود

$ق (س)$ اذا وفقط إذا كان $ق \left(-\frac{ب}{أ} \right) = صفر$ والعكس أيضاً صواب.

والأمثلة التالية توضح ما أوردناه من حقائق عن نظرية العوامل:

مثال:

هل $هـ (س) = س - 2$ عامل من عوامل $ق (س) = س^3 - 3س^2 + س - 9$



الجواب: يكون هـ (س) عامل من عوامل ق (س) إذا كان ق (٢) = صفر

لنجد $Q = 2 - 2 + 12 - 8 = 2 - 2 + {}^2(2) 2 - {}^2(2) + (2) \neq 0$ صفر

∴ س - ۲ ليس عامل من عوامل س^۲ - ۳س + ۳

مثال:

هل س - ٣ عامل من عوامل ق (س) = س^٢ - ٣ س + ٢

يكون س - ٣ عامل من عوامل ق (س) إذا كان ق (٣) = صفر

النجد ق (3) = ${}^1(3) - {}^2(3) + {}^3(3) - {}^4(3) + \dots = 3 - 3 + 3 - 3 + \dots = 0$ صفر

∴ س - ۳ عامل من عوامل ق (س)

ويمكن أن يقال أن تحليل Factorizgtion كثرات الحدود الى عواملها الأولية من أشهر التطبيقات على نظرية العوامل.

والتفسير في هذه السطور:

العامل الأولي للاقتران كثير الحدود هو الاقتران الذي لا يمكن تحليله الى اقترانات أخرى أقل منه درجة ، وبناء عليه إن اخراج العامل المشترك الأكبر كعدد حقيقي (اقتران ثابت) لا يُعتبر تحليلاً الى العوامل الأولية، ففي الاقتران:

ق (س) = ٤ س + ٨ فإن ٤(س + ٢) ليس تحليلاً الى العوامل على الاطلاق.

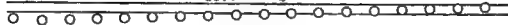
كون ق (س) = ٤ س + ٨ اختران خطى من الدرجة الأولى.

وكون هـ (س) = س + ٢ اقتران خطي من الدرجة الأولى.

فالافتقارن هـ (س) = س + ٢ ليس أقل من ق (س) = ٤ + س + ٨ بدرجة على الإطلاق،
لذا يقال أن الافتقارن الخطي هو افتقارن أولى لا يُحلل إلى افتقارات أولى.

والاقتتران التربيعي والذي على الصورة العامة $ق(س) = أ س^2 + ب س + ج$

يكون أولياً وغير قابل للتحليل الى العوامل عندما يكون مخبره ب² - ٤ أ ج > صفر



$$\text{مثل ق (س) = س}^2 + \text{س} + 1$$

$$\text{حيث أ = 1 ، ب = 1 ، ج = 1}$$

$$\text{حيث مميزه ب}^2 - 4 \text{ أ ج} = 1 - 4 = -3 < 0 \text{ صفر}$$

مثال:

يبين أن س - 1 عامل أولي من عوامل الاقتران ق(س) = س² - 3س + 2 الأولية ثم أوجد عوامله الأولية الأخرى.

$$\text{س - 1 = صفر} \leftarrow \text{س = 1 صفر المقسوم عليه.}$$

$$\text{لنجد: ق (1) = (1) - 3(1) + 2 = صفر}$$

$$\therefore \text{س - 1 عامل من عوامل ق (س) = س}^2 - 3س + 2$$

ولإيجاد بقية العوامل نقسم س² - 3س + 2 على س - 1 إما قسمة طويلة أو تركيبيه هكذا وبالتركيبين:

$$\text{س - 1 = صفر} \leftarrow \text{س = 1 صفر المقسوم عليه}$$

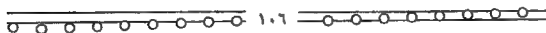
صفر المقسوم عليه	س ²	س	س	س: الثابت
(1)	1	0	-3	2
	↓	1	1	2-
		1	-2	∴

$$\therefore \text{ق (س) = س}^2 - 3س + 2 = (\text{س} - 1)(\text{س} + 2)$$

ثم نحلل الناتج هكذا:

$$\text{ق (س) = س}^2 - 3س + 2 = (\text{س} - 1)(\text{س} + 2)$$

$$= (\text{س} + 2)(\text{س} - 1)$$





ملحوظة:

لكثير الحدود ق (س) = $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$.
 ذي المعاملات الصحيحة في بعض الأحيان أصفار نسبية ناتجة عن خارج قسمة عوامل
 الحد الأخير (المطلق) أ. على عوامل معامل الحد الأول (الرئيس) أن وذلك عندما
 يكون أن $3 - \{1\}$ أي عدد صحيح ما عدا الواحد الصحيح كما في المثال:

مثال:

للاقتران الجبري ق (س) = $2s^2 - 5s - 4$ س + ٢ أصفار نسبية ناتجة عن
 قسمة عوامل العدد ٢ على عوامل العدد ٢ حيث:

عوامل الحد أ. (٢) هي $1 \pm, 2 \pm$

عوامل معامل الحد أن (٢) هي $1 \pm, 2 \pm$

∴ جميع أصفار ق (س) موجبة كما في المجموعة $\{1 \pm, \frac{2}{2} \pm, 3 \pm, 1 \pm\}$

وأما الأصفار النسبية تنتمي الى المجموعة $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{2}{2}\}$

والبيان:

$$ق \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 5 \left(\frac{1}{2} \right) - 4 = \frac{1}{4} - \frac{5}{2} - 4 = \frac{1 - 10 - 16}{4} = \frac{-25}{4}$$

$$= \frac{2}{8} - \frac{5}{4} + \frac{4}{2} = \frac{2 - 10 + 16}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

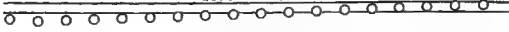
∴ هو الصفر النسبي للاقتران ق (س)

وبأسلوب مماثل يمكن أن نجد أصفار نسبية أخرى للاقتران ق (س) أن وجدت من

ضمن المجموعة $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{2}{2}\}$

وهذا يساعد في تحليل كثيرات الحدود التي معاملاتها حدودها الأولى ليس واحد
 صحيح كما في المثال:





وبأسلوب مماثل ينتهي عن أصفاره في المجموعة.

$$\{1 \pm 1, 2 \pm 1, 3 \pm 1, 4 \pm 1, 6 \pm 1, 12 \pm 1\}$$

وباستخدام نظرية العوامل والقسمة الطويلة أو التركيبية نجد أن - 1 ، 2 ، 3 ، فقط هي أصفاره

$$\therefore \text{عوامله الأولية (س + 1) ، (س - 2) ، (س - 3) ، (س}^2\text{ + 2س + 2)}$$

والملاحظ أن عوامله الأولية 2 اقتترانات خطية واقتران تربيعي

$$(س^2 + 2س + 2) \text{ كون مميزه بـ } 4 - 4 = 2(2) - 4 \times 1 \times 2 = -4 < \text{صفر}$$

$$\therefore \text{ق (س) ، (س + 1)(س - 2)(س - 3) (س}^2\text{ + 2س + 2)}$$

ملحوظة جديرة بالاهتمام:

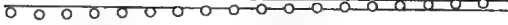
لقد مرّ في فصل التحليل الى العوامل من هذا المؤلف أن طرق التحليل خمس وهي...إخراج العامل المشترك، تجميع الحدود، العبارة التربيعية، الفرق بين مربعين، مجموع مكعبين والفرق بينهما...، والآن سيضاف طريقة سادسة وهي باستخدام نظرية العوامل لتصبح الطرق ستة كما لاحظت في الأمثلة السابقة.

ملحوظة أخرى هامة جداً:

مرّ في فصل التحليل الى العوامل أن الاقتترانات التي على صورة الفرق بين مربعين مثل ق (س) = $س^2 - 4$ تحلل، أما إذا كانت على صورة مجموع مربعين مثل ق (س) = $س^2 + 4$ فلا تحلل، هذا صحيح ولكن ليس دائماً لا تحلل، بل يحلل (مجموع مربعين) إذا أمكن تحويله الى صورة الفرق بين مربعين كما في المثال:

مثال (أ):

$$\text{حلل الاقتران ق (س) = } س^4 - 1 \text{ الى عوامله الأولية}$$



التحليل هنا لا يحتاج الى نظرية العوامل كونه مرّ سابقاً كما يلي:

$$س^4 - 1 = (س^2 - 1)(س^2 + 1) \text{ كفرق بين مربعين}$$

$$= (س - 1)(س + 1)(س^2 + 1) \text{ وكفرق بين مربعين أيضاً}$$

$$\text{للاقتار } س^2 - 1$$

$$س^4 - 1 = (س - 1)(س + 1)(س^2 + 1) \text{ ككون } س^2 + 1 \text{ لا يحلل لأنه اقتار}$$

$$\text{تربيعي مميزه بـ } 2 - 4 \text{ أـ جـ } = 4 - 1 \times 1 \times 1$$

$$= - 4 \text{ سالب}$$

مثال (ب):

لكن هل الاقتار $س^4 + 1$ يحلل الى عوامله الأولية مع أنه بصورة مجموع مربعين

$$\text{هكذا: } (س^2 + 1)^2$$

الجواب: مع أنه بصورة مجموع مربعين فإنه يحلل كما يلي:

نحوه الى صورة فرق بين مربعين $(س^2 + 1)^2 + (10)^2$ فإضافة ضعف الحد الأول*

الحد الثاني $= 2 \times 2 = 4$ ثم طرحه:

$$س^4 + 1 = س^4 + 2س^2 + 1 - 2س^2 = (س^2 + 1)^2 - 2س^2$$

والسبب جعله كفرق بين مربعين هكذا:

$$= (س^2 + 1)^2 - 2س^2 = (س^2 + 1 - \sqrt{2}س)(س^2 + 1 + \sqrt{2}س)$$

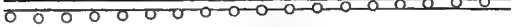
$$= (س^2 + 1 - \sqrt{2}س)(س^2 + 1 + \sqrt{2}س)$$

والآن بعد تحويله الى صورة الفرق بين مربعين أصبح يحلل.

أي أن $س^4 + 1 = (س^2 + 1 - \sqrt{2}س)(س^2 + 1 + \sqrt{2}س)$ ويعد ترتيب حدوده.

$$= (س^2 + 1 - \sqrt{2}س)(س^2 + 1 + \sqrt{2}س)$$

وللتحقق من صحة التحليل نستخدم قانون التوزيع أي نمكس السؤال هكذا:



$$(س^2 - 2ص + 1) (1 + (س^2 + 2ص + 1)) = س^4 + 1 \quad \text{نرى..}$$

الطرف الأيمن:

$$= س^2 (س^2 + 2ص + 1) + (1 + (س^2 + 2ص + 1)) (س^2 - 2ص + 1)$$

$$= س^4 + 2س^3ص + س^2 + س^2 - 2ص + 1 + س^4 + 2س^3ص + س^2 + 1 - 2ص + 1$$

$$= س^4 + 1 = \text{الطرف الأيسر} \quad \text{فطريقة الحل صواب!}$$

مثال:

حلل $س^4 + 4$ الى عوامله الأولية:

نحوّل الاقتاران $س^4 + 4$ إلى صورة فرق بين مربعين وذلك:

$$س^4 + 4 \neq (س^2)^2 + (2)^2 \quad \text{بإضافة ضعف الحد الأول} \times \text{الحد الثاني}$$

$$= 2 \times س^2 \times 2 = 4س^2 \quad \text{ثم طرحه هكذا:}$$

$$س^4 + 4 = س^4 + 4س^2 + 4 - 4س^2 = (س^2 + 2)^2 - (2س)^2$$

$$= (س^2 + 2 + 2س) (س^2 + 2 - 2س)$$

$$= (س^2 + 2س + 2) (س^2 - 2س + 2) \quad \text{أصبح بصورة فرق بين مربعين}$$

$$= (س^2 + 2س + 2) (س^2 - 2س + 2) \quad \text{ويعد ترتيب حدوده.}$$

$$= (س^2 + 2س + 2) (س^2 - 2س + 2)$$

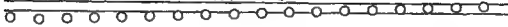
تحقق من صحة الحل باستخدام قانون التوزيع كما مرّ بالمثال أعلاه

(٨- ١٠) حل أنظمة من المعادلات الجبرية بمتغير واحد:

Solving Algebraic Equations with one Variabh

نعود الى المعادلات ونحل أنظمة بمتغير واحد بالذات لكن بكافة الدرجات

"الأول والثانية والثالثة، وعلى جميع أنواع الاقتارات.



التفسير كما هو آت:

(i) حل أنظمة من المعادلات تحتوي على اقتراانات القيمة المطلقة:

في البداية هناك خاصية للقيمة المطلقة تستخدم في حل المعادلات التي تحتوي اقتراانات القيمة المطلقة وهي:

$$\text{إذا كان } |س| = |ص|$$

$$\text{فأما } س = ص \text{ وأما } س = -ص$$

$$\text{فإذا كان } |س| = |٥|$$

$$\text{فأما } س = ٥ \text{ وأما } س = -٥$$

وبشكل عام إذا كان $|س| = |ص|$

فأما $س = ص$ ؛ وأما $س = -ص$ كما في المثال:

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية:

$$(i) |س| = ٣ \quad (ii) |٢س - ١| = ٥$$

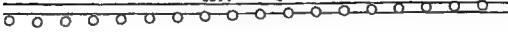
$$(iii) |س - ٢| = ٢ \quad (iv) |س - ٤| = |٢س + ١|$$

$$(v) |٢س + ١| = |س + ٧| \quad \text{لكل على انفراد.}$$

الحل:

يتم الحل بالتخلص من رمز القيمة المطلقة $| |$ ، وذلك بإعادة التعريف،
ويأخذ القيمتين الموجبة والسالبة للطرف الأيسر كما مرّ أعلاه هكذا:

$$(i) |س| = ٣ \leftarrow س = ٣ , س = -٣ \quad \text{مجموعة الحل} = \{٣ , -٣\}$$



$$\text{وكذلك } 2 \text{ س} - 1 = 0$$

$$\text{أي أن } 2 \text{ س} - 1 = 0 \quad , \quad 2 \text{ س} - 1 = 0$$

$$2 \text{ س} - 1 = 0 \quad , \quad 2 \text{ س} - 1 = 0$$

$$2 \text{ س} - 1 = 0 \quad , \quad 2 \text{ س} - 1 = 0$$

$$\text{مجموعة الحل} = \{2, -2\}$$

$$\text{وكذلك } 2 \text{ س} - 2 = 0$$

$$\text{أي أن } 2 \text{ س} - 2 = 0 \quad , \quad 2 \text{ س} - 2 = 0$$

$$2 \text{ س} - 2 = 0 \quad , \quad 2 \text{ س} - 2 = 0$$

$$\text{عبارة أولية كونهما غيرهما} \quad \text{س} - 1 = 0 \quad \text{س} - 1 = 0$$

$$2 \text{ س} - 2 = 0 \quad , \quad 2 \text{ س} - 2 = 0$$

لا نحلل

$$\text{مجموعة الحل} = \{1, \text{صفر}\}$$

$$\text{وكذلك } 2 \text{ س} - 1 = 0$$

وبناءً على الخاصية أعلاه:

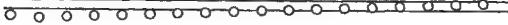
$$2 \text{ س} - 1 = 0 \quad , \quad 2 \text{ س} - 1 = 0$$

$$2 \text{ س} - 1 = 0 \quad , \quad 2 \text{ س} - 1 = 0$$

$$2 \text{ س} - 1 = 0 \quad , \quad 2 \text{ س} - 1 = 0$$

$$2 \text{ س} - 1 = 0 \quad , \quad 2 \text{ س} - 1 = 0$$

$$\text{مجموعة الحل} = \{1, 0\}$$



$$\text{وكذلك } |7 + \text{س}| = |1 + \text{س}|$$

$$7 + \text{س} = 1 + \text{س} \quad , \quad 7 - \text{س} = 1 + \text{س}$$

$$7 - \text{س} = 1 + \text{س} \quad \text{صفر} \quad 7 + \text{س} = 1 + \text{س} \quad \text{صفر}$$

$$7 - \text{س} = 6 \quad \text{صفر} \quad 7 + \text{س} = 8 \quad \text{صفر}$$

$$7 = \text{س} \quad , \quad 8 = \text{س}$$

$$7 = \text{س} \quad , \quad 8 = \text{س}$$

مجموعة الحل = $\{7, 8\}$ تحقق من صحة الحل.

(ii) حل أنظمة من المعادلات الخطية التي تحتوي اقتارات أكبر عدد صحيح (اقتارات درجة أو سلمية)

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية:

$$(i) \quad 7 = \text{س} \quad , \quad (ii) \quad 7 - 6 = \text{س}$$

$$(iii) \quad \text{س} - 1 = \text{صفر} \quad \text{حيث } 7 \geq \text{س} > 1$$

كل على انفراد

يتم الحل بإعادة التعريف للتخلص من رمز أكبر عدد صحيح [1] وذلك

باستخدام التعريف العام للاقتاران ق (س) = [س] وهو:

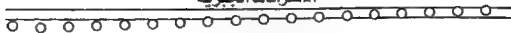
$$[س] \xleftarrow{\text{إعادة التعريف}} \text{ن} \geq \text{س} > \text{ن} + 1$$

$$(i) \quad 7 = [س] \quad 7 \geq \text{س} > 6$$

$$\text{ويقسمة الأطراف على 2} \quad \frac{7}{2} \geq \text{س} > \frac{6}{2}$$

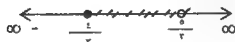
$$\text{مجموعة الحل} = \left\{ \frac{7}{2} \geq \text{س} > \frac{6}{2} \right\}$$

الاقتارات الجبرية



وتمثيل المجموعة متغيرة: $s \in \left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3} \right]$

وتمثيل المجموعة على خط الاعداد:



حل (ii) $s \in [-2, 6]$ صفر وبيادة التعريف:

صفر $s \in [-2, 6]$ وبيادة - 6 لجميع الأطراف

$$6 - 6 - 6 -$$

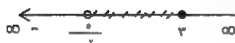
ويقسمة جميع الأطراف على - 2 مع تغيير اشارة التباين أو علاقة الترتيب هكذا:

$$\frac{6 -}{2 -} \geq \frac{-2 -}{2 -} > \frac{6 -}{2 -}$$

$$3 \leq s < \frac{5}{2}$$

أي $\frac{5}{2} > s \geq 3$ مجموعة الحل $\left\{ \frac{5}{2} > s \geq 3 \right\}$

ويشكل فترة $s \in \left(\frac{5}{2}, 3 \right]$ وعلى خط الاعداد



وللتحقق من صحة الحل: افرض $s = 2.6 = \frac{26}{10}$

$$\text{أي أن } [-2, 6] \cap \left(\frac{5}{2}, 3 \right] = \left[\frac{52}{10}, 6 \right] \cap \left[\frac{52}{10}, 6 \right] = \left[\frac{52}{10}, 6 \right] = [-2.4, 6] \cap [-2.4, 6] = [-2.4, 6]$$

وهذا يحقق السؤال.

حل (iii) $s \in [-1, 2]$ صفر ، حيث $s \geq 2$ و $s > 1$

نعيد التعريف على الفترة $[-1, 2]$ ، 1

وحيث أن طول الدرجة $= \frac{1}{|0.1|} = 10$ هكذا:



نُعرف أولاً $s \in [-1, 2]$ على الفترة هكذا:



$$\left. \begin{array}{l} 1 - > س \geq 2 - \\ 0 > س \geq 1 - \\ 1 > س \geq 0 \end{array} \right\} = [س]$$

ومن المعادلة: $س - [س] = \text{صفر}$

$$\begin{array}{r} [س] + \quad [س] + \\ \hline س = [س] \end{array}$$

$$\therefore [س] = \{0, 1, 2, \dots\}$$

مجموعة الحل = $\{0, 1, 2, \dots\}$ ولا تمثل بفترة



وإنما على خط الأعداد

كأعداد حقيقية فقط.

وللتحقق: عندما $س = 2$

$$\text{أي } 2 - [2] = 2 - 2 = 0 = \text{صفر وهكذا} \dots$$

(iii) حل أنظمة من المعادلات تحتوي اقتارات كثيرة الحدود (بمتغير واحد) ومن درجات متعددة كما في المثال:

مثال:

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية:

$$(1) س^2 + 6س + 11 = \text{صفر}$$

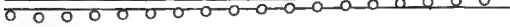
$$(2) 3س^4 - 48س^2 = \text{صفر}$$

$$(3) س^5 - 2س^3 + س = \text{صفر}$$

$$(4) س^6 - 9س^2 + 8 = \text{صفر}$$

$$(5) س^4 + 16 = \text{صفر}$$

الاقتراءات الجبرية



يتم الحل باستخدام طرق التحليل الى العوامل ونظريتي الباقي والعوامل
والقسمة الطويلة أو التركيبية، كما يتطلب الحل هكذا:

حل (١):

$$س^٢ + ٦س + ١١ = صفر$$

نحلل الاقتران المرافق ق (س) = $س^٢ + ٦س + ١١$ (الطرف الأيمن)

الى عوامله.

وحيث أن أصفاره المحتملة من المجموعة $\{١ \pm, ٠٢ \pm, ٣ \pm, ٦ \pm\}$

وبالتجريب (نظرية العوامل والباقي) ق $(-١) = (-١) + ٦ + ١١ = ٠$

$$= -١ + ٦ + ١١ = ١٢ - ١٢ = صفر$$

∴ -١ صفر للاقتران ومنها س + ١ عامل من عوامله الأولية

وبالقسمة التركيبية نجد بقية العوامل هكذا:

(١-)	س ^٣	س ^٢	س	س'
١	١	٦	١١	٦
↓	١-	٥-	٥-	٦-
١	١	٥	٦	∴

أي أن

$$س^٢ + ٦س + ١١ = (س + ١)(س + ٥ + ٦) \text{ وتحليل الطرف الأيسر}$$

$$= (س + ١)(س + ٣)(س + ٢) = صفر$$

∴ س = -١ ، -٢ ، -٣ جذور المعادلة

مجموعة الحل = $\{-١, -٢, -٣\}$ تحقق من صحة الحل.



حل (٢):

وكذلك $٣س - ٤٨ = ٢س$ = صفر

بتحليل الطرف الأيمن وهو الافتراض المرافق للمعادلة كما يلي:

$٣س - ٢س = (١٦ - ٢س)$ = صفر اخراج العامل المشترك $٢س$

$٣س - ٢س = (٤ - ٢س)$ = صفر ثم تحليل فرق بين مربعين

ومنها $٣س - ٢س =$ صفر \leftarrow $٤س =$ صفر الجذر الأول للمعادلة

$٤س = ٤ +$ صفر \leftarrow $٤س - ٤ =$ صفر الجذر الثاني للمعادلة

$٤س - ٤ =$ صفر \leftarrow $٤س =$ صفر الجذر الثالث للمعادلة

مجموعة الحل = $\{٤، صفر، ٤\}$ تحقق من صحة الحل إن شئت.

حل (٣):

وكذلك $٢س - ٢س + ٢س =$ صفر

نحل الطرف الأيمن وهو الافتراض المرافق للمعادلة كما يلي:

$٢س - ٢س + ٢س = (١ + ٢س)$ = صفر اخراج العامل المشترك $٢س$

$٢س - ٢س + ٢س = (١ - ٢س)$ = صفر ثم تحليل عبارة تربيعين

$٢س + (١ - ٢س) = (١ - ٢س) + (١ + ٢س) = (١ - ٢س)$ = صفر

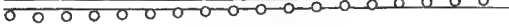
ومنها: $٢س =$ صفر جذر المعادلة الأول

$٢س + ١ =$ صفر \leftarrow $١ - ٢س =$ صفر جذر المعادلة الثاني

$١ - ٢س =$ صفر \leftarrow $١ = ٢س$ جذر المعادلة الثالث

والجذران $١، ١$ مكرران

مجموعة الحل = $\{١، صفر، ١\}$ إن أردت أن تتحقق من صحة الحل فتحقق!



وكذلك $س^1 - ٩س^٢ + ٨ = \text{صفر}$

بوضع المعادلة بصورة عبارة تربيعية واستعانة بالقانون عند الرفع نضرب الأساس هكذا: $س^٢ \times س^٢ = (س^٢)^٢$ تصبح المعادلة:-

$$\therefore (س^٢)^٢ - ٩س^٢ + ٨ = \text{صفر}$$

$$(س^٢ - ١)(س^٢ - ٨) = \text{صفر} \quad \text{تحليل كعبارة تربيعية}$$

$(س - ١)(س + ١)(س^٢ + س + ١)(س - ٢)(س + ٢ + س + ٤) = \text{صفر}$ وتحليل كفرق مكعبين لكليةما

$$س - ١ = \text{صفر} \quad س = ١ \quad \text{جذر المعادلة الأول}$$

$س^٢ + س + ١ = \text{صفر}$ عبارة تربيعية مميزها سالب (ب) $١٤ - ١ = ١٢$ ج = $١٢ - ١ \times ١ = ١٠$ جذورها غير حقيقيين

$$س - ٢ = \text{صفر} \quad س = ٢ \quad \text{جذر المعادلة الثانية}$$

$س^٢ + س + ٤ = \text{صفر}$ عبارة تربيعية مميزها سالب (تأكد) جذورها غير حقيقية $\therefore س = ١, ٢$ جذور المعادلة

مجموعتي الحل $\{ ١, ٢ \}$ تحقق من صحة الحل.

ملحوظة:

هذا ويمكن التوصل الى الخطوة:

$$(س^٢ - ١)(س^٢ - ٨) = \text{صفر} \quad \text{بأسلوب أبسط هو:}$$

افرض أن $س^٢ = ص$ عندها $س^١ - ٩س^٢ + ٨ = \text{صفر}$

$$= (س^٢)^٢ - ٩س^٢ + ٨ = \text{صفر}$$

$$\text{أي أن } ص^٢ - ٩ص + ٨ = \text{صفر}$$

$$(ص - ١)(ص - ٨) = \text{صفر}$$

ثم استبدل $ص = س^٢$

$$\therefore (س^٢ - ١)(س^٢ - ٨) = \text{صفر} \quad \text{وبقيه كما هو أعلاه بالتمام.}$$

(٨- ١١) تجزئة الاقتدرات الجبرية النسبية أو (تجزئة الكسور الجبرية):

:Partial of the Rational Functions

من المعلوم أن ناتج جمع الاقترانين النسبيين:

$$\frac{5(س + 1)}{(س - 4)(س + 1)} + \frac{8(س - 4)}{(س - 4)(س + 1)} = \frac{5}{س - 4} + \frac{8}{س + 1}$$

توحيد المقامات

$$\frac{5(س + 1) + 8(س - 4)}{(س - 4)(س + 1)} = \frac{5س + 5 + 8س - 32}{(س - 4)(س + 1)} = \frac{13س - 27}{(س - 4)(س + 1)}$$

$$\frac{13س - 27}{(س - 4)(س + 1)} = \frac{13س - 27}{س^2 - 3س - 4}$$

$$\frac{13س - 27}{س^2 - 3س - 4} = \frac{5}{س - 4} + \frac{8}{س + 1} \therefore$$

والعكس لننظر الى السؤال بطريقة عكسية لنقول:

ما السبيل لجعل الطرف اليسار المكون من اقتران نسبي واحد هو $\frac{13س - 27}{س^2 - 3س - 4}$

اقترانين نسبيين هما: $\frac{5}{س - 4}$ ، $\frac{8}{س + 1}$ (كما هو واضح أعلاه)؟

الجواب:

هذه العملية العكسية والتي نحن بصددتها الآن تُسمى تجزئة الاقتدرات النسبية (أو الكسور الجبرية).

وتتم كما يلي (شرط أن يكون درجة البسط أقل من درجة المقام في جميع الحالات). وهذا الشرط خاص ومقبول في هذا المستوى بالذات.

دونك عملية تجزئة الكسور الجبرية أو الاقتدرات النسبية بإيجاز:

$$\text{تحليل المقام} \quad \frac{ب}{س - 4} + \frac{أ}{س + 1} = \frac{13س - 27}{(س - 4)(س + 1)} = \frac{13س - 27}{س^2 - 3س - 4}$$

الاقتارات الجبرية

$$\therefore \frac{13 \text{ م} - 27}{\text{م}^2 - 3\text{ م} - 4} = \frac{\text{أ} (\text{م} - 4) + \text{ب} (\text{م} + 1)}{(\text{م} - 4) (\text{م} + 1)}$$

بعد اعادة توحيد المقامات

$$\frac{13 \text{ م} - 27}{\text{م}^2 - 3\text{ م} - 4} = \frac{\text{أ} \text{ م} - 4\text{ أ} + \text{ب} \text{ م} + \text{ب}}{(\text{م} - 4) (\text{م} + 1)}$$

وبما أن الاقترانين النسبيين متساويين والمقامات متساوية أيضاً:

∴ بسط الكسر الأول = بسط الكسر الثاني (الكسور الجبرية)

$$\therefore 13 \text{ م} - 27 = \text{أ} \text{ م} - 4\text{ أ} + \text{ب} \text{ م} + \text{ب}$$

$$\therefore 13 \text{ م} - 27 = 27 - 4\text{ أ} + \text{ب} (\text{م} + 1) \text{ م} - 4\text{ أ} + \text{ب} (\text{م} + 1)$$

أي أن المعاملات المتناظرة متساوية:

$$\therefore \begin{cases} \text{أ} + \text{ب} = 13 & (1) \text{ (معاملات م)} \\ \text{أ} - 4\text{ أ} + \text{ب} = 27 & (2) \text{ (الحدود المطلقة)} \end{cases}$$

وكذلك 4 أ - 4 أ = 0

$$8 = \frac{40}{5} = 8 \leftarrow 40 = 5 \times 8$$

$$\text{لكن } \text{أ} + \text{ب} = 13 \leftarrow 13 = \text{أ} + 8 \leftarrow \text{ب} = 5$$

$$\frac{13 \text{ م} - 27}{\text{م}^2 - 3\text{ م} - 4} = \frac{8}{\text{م} + 1} + \frac{5}{\text{م} - 4}$$

وبهذه الطريقة تمت تجزئة الكسر الجبري الى رقمين أو أكثر حسب

عوامل المقام.

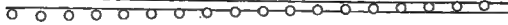
ملحوظة يمكن الاستفادة منها:

يمكن اجراء عملية التجزئة بطريقة أخرى دون اللجوء الى المعادلتين كما يلي:

$$\text{بما أن } \frac{13 \text{ م} - 27}{\text{م}^2 - 3\text{ م} - 4} = \frac{\text{أ} (\text{م} - 4) + \text{ب} (\text{م} + 1)}{(\text{م} - 4) (\text{م} + 1)}$$

$$\text{فإن } \frac{13 \text{ م} - 27}{\text{م}^2 - 3\text{ م} - 4} = \frac{\text{أ} (\text{م} - 4) + \text{ب} (\text{م} + 1)}{(\text{م} - 4) (\text{م} + 1)}$$

الاقتارات الجبرية



ومنها ١٢ س - ٢٧ = أ (س - ٤) + ب (س + ١)

لإيجاد قيمة أ نقدم ب (بجعل س + ١ = صفر ← س = - ١)

$$\therefore ١٢ - (١ -) = ٢٧ - أ (س - ٤) + ب (- ١ + ١)$$

$$- ٤٠ = - ١٥ \leftarrow أ = ٨$$

لإيجاد قيمة ب نقدم أ (بجعل س - ٤ = صفر ← س = ٤)

$$\therefore ١٢ - (٤) = ٢٧ - أ (٤ - ٤) + ب (٤ + ١)$$

$$٢٥ = ٥ ب \leftarrow ب = ٥ \quad \text{ثم نكمل..}$$

ملحوظة أخرى:

وسنقصر عملية التجزئة التي نحن بصدها على الاقتارات النسبية والكسور الجبرية التي مقاماتها تُحلل الى عوامل أولية خطية فقط.

مثال:

جزئ الاقتران النسبي ق (س) = $\frac{١١ \text{ س} - ٧}{٢ \text{ س}^٢ - ٢ \text{ س} - ٥ \text{ س} - ٦}$ الى اقتارات أخرى.

$$\text{بعد تحليل المقام الى} \quad \frac{١١ \text{ س} - ٧}{(١ + \text{س})(٢ - \text{س})(٣ + \text{س})} = \frac{١١ \text{ س} - ٧}{٢ \text{ س}^٢ - ٢ \text{ س} - ٥ \text{ س} - ٦}$$

عوامل خطية باستخدام نظرية العوامل والقسمة.

$$\therefore \frac{١١ \text{ س} - ٧}{٢ \text{ س}^٢ - ٢ \text{ س} - ٥ \text{ س} - ٦} = \frac{أ}{١ + \text{س}} + \frac{ب}{٢ - \text{س}} + \frac{ج}{٣ + \text{س}} \quad \text{كون}$$

عدد عوامل المقام هو ٣

أي أن:

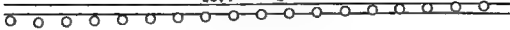
$$\frac{أ (٢ - \text{س})(٣ + \text{س}) + ب (١ + \text{س})(٣ + \text{س}) + ج (١ + \text{س})(٢ - \text{س})}{(٢ - \text{س})(٣ + \text{س})(١ + \text{س})} = \frac{١١ \text{ س} - ٧}{٢ \text{ س}^٢ - ٢ \text{ س} - ٥ \text{ س} - ٦}$$

لإيجاد قيمة ب نعرض س = ٢ لعدم أ ، ج معاً

$$١١ - (٢) = ٧ - أ (٢ - ٢) + ب (٢ + ٣) + ج (٢ + ٣) \quad \text{ج} = (٢ + ٢) (١ - ٢)$$



الاقترانات الجبرية



$$٢٢ - ٧ = ١٥ \text{ ب}$$

$$١٥ = ١٥ \text{ ب} \leftarrow \text{ب} = ١$$

لإيجاد قيمة أنفرض س = - ١ لعدم ب، ج معاً

أي أن ١١ (-) ١ - ٧ = أ (-) ٣ (٢) - صفر + صفر كما مرّ أعلاه.

$$١٨ - ١٦ \leftarrow ٢ = أ$$

لإيجاد قيمة ج نفرض س = - ٢ لعدم أ، ج معاً

أي أن ١١ (-) ٣ - ٧ = صفر + صفر + ٥ (-) ٢ (٥)

$$٤٠ = ١٠ \text{ ج} \leftarrow \text{ج} = ٥$$

$$\therefore \frac{\frac{١١ \text{ س} - ٧}{٦ \text{ س} - ٥} + \frac{\frac{١}{١ + \text{س}}}{\frac{٢}{٢ + \text{س}}} = \frac{١٠ \text{ ج} - ٧}{٦ \text{ س} - ٥} + \frac{\frac{١}{١ + \text{س}}}{\frac{٢}{٢ + \text{س}}}$$

مثال:

$$\frac{١ + \frac{٢}{\text{س}}}{١ - \frac{٢}{\text{س}}} \text{ جزئى الاقتران النسبى}$$

بما أن درجة البسط = درجة المقام

فإننا نجري عملية القسمة الطويلة فقط أولاً لتصبح درجة البسط أقل من درجة

المقام كما في (الشرط السابق) هكذا:

$$\begin{array}{r} ١ \\ ١ - \frac{٢}{\text{س}} \overline{) ١ + \frac{٢}{\text{س}}} \\ \underline{١ \pm \frac{٢}{\text{س}}} \\ ٢ \end{array}$$

$$\therefore \frac{١ + \frac{٢}{\text{س}}}{١ - \frac{٢}{\text{س}}} = ١ + \frac{٢}{١ - \frac{٢}{\text{س}}} \text{ والآن نجزئى الكسر هكذا:}$$

$$\frac{\frac{٢}{١ - \frac{٢}{\text{س}}}}{\frac{١}{١ + \text{س}}} = \frac{٢}{(١ - \frac{٢}{\text{س}})(١ + \text{س})} = \frac{٢}{١ - \frac{٢}{\text{س}}}$$

$$\text{أي أن } \frac{٢}{١ - \frac{٢}{\text{س}}} = \frac{٢(١ + \text{س})}{(١ - \frac{٢}{\text{س}})(١ + \text{س})}$$



$$\therefore 2 = 1 + (1 - s) + (1 + s)$$

لايجاد أ نعدم ب بوضع س = -1

$$2 = 1 + (-1 - 1) + (-1 - 1) \leftarrow 2 = -2 \leftarrow 1 = -1$$

لايجاد ب نعدم أ بوضع س = 1

$$2 = 1 + (1 + 1) + 1 \leftarrow 2 = 3 \leftarrow 1 = 1$$

$$\therefore \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1-s^2} - 1 = \frac{1+s^2}{1-s^2}$$

مثال:

$$\text{جزئ الاقتران النسبي} \frac{s^2 - 2s + 1}{s^2 - 2s + 1}$$

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام فإننا نجري القسمة الطويلة

لتصبح درجة البسط أقل من درجة المقام هكذا:

$$\begin{array}{r} s \\ 2-s \overline{) s^2 - 2s + 1} \\ \underline{s^2 - 2s + 1} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore \frac{s^2 - 2s + 1}{s^2 - 2s + 1} = 1 + \frac{0}{s^2 - 2s + 1} \text{ وتستمر بعملية التجزئة.}$$

$$\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} = \frac{1}{(1+s)(1-s)} = \frac{1}{1-s^2}$$

$$\frac{(1+s) + (1-s)}{(1+s)(1-s)} = \frac{2}{(1+s)(1-s)}$$

$$1 = (1+s) + (1-s) \leftarrow 1 = 2 \leftarrow 1 = 1$$

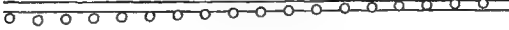
لا مدهاء أ نضع س = 1

$$1 = 1 + (1 - 1) + 1 \leftarrow 1 = 1 \leftarrow 1 = 1$$

لا مدهاء ب نضع س = 2

$$1 = 1 + (1 + 2) + 1 \leftarrow 1 = 4 \leftarrow 1 = 1$$

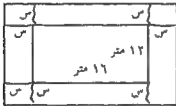
الاقتارات الجبرية



$$\frac{1}{1+s} + \frac{1}{2-s} + s = \frac{s^2 - 2s + 1}{2-s} - \frac{1}{(2-s)^2} + s =$$

مثال تطبيقي:

بركة سباحة مستطيلة الشكل بعذاها ١٦ ، ١٢ م أحيطت بممر اسمنتي منتظم مساحته ١٢٨ متر مربع احسب طول ضلع الممر.



نفرض أن طول ضلع الممر = س متر

فطول البركة والممر = ١٦ + ٢ س متر

وعرض البركة والممر = ١٢ + ٢ س متر

وبما أن:

مساحة الممر = مساحة البركة والممر = مساحة البركة. فإن:

$$128 = (16 + 2s)(12 + 2s) - (16)(12)$$

$$128 = 192 + 32s + 24s + 4s^2 - 192$$

$$4s^2 + 56s - 128 = 0$$

٤

$$s^2 + 14s - 32 = 0$$

$$(s + 16)(s - 2) = 0$$

س = - ١٦ جواب مرفوض حيث الطول لا يمكن أن يكون سالباً

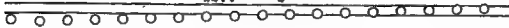
س = ٢ متر عرض الممر.

التحقق: طول البركة والممر = ١٦ + ٢ (٢) = ٢٠ متر

عرض البركة والممر = ١٢ + ٢ (٢) = ١٦ متر



الاقتراحات الجبرية



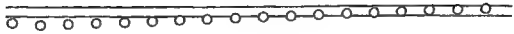
مساحة البركة والممر = (٢٠) (١٦) = ٣٢٠ مترمربع

مساحة الممر = مساحة البركة والممر - مساحة البركة

$$= ٣٢٠ - (١٦ \times ١٢)$$

$$= ١٩٢ - ٣٢٠ = ١٢٨ \text{ مترمربع}$$

وهو كما ورد في السؤال.



(٨ - ١٢) أمثلة محلولة على الاقتارات الجبرية

مثال (١):

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2, \text{س} \leq 1 \\ \text{س}^3 - 2, \text{س} > 1 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

أوجد ق (٢)، ق (١)، ق (-١)

الحل:

ق (٢): نأخذ القاعدة ق (س) = س^2 كون $2 < 1$

$$\therefore \text{ق (٢)} = \text{س}^2(2) = 4$$

ق (١): نأخذ القاعدة ق (س) = س^2 كون $1 \leq 1$

$$\text{ق (١)} = \text{س}^2(1) = 1$$

ق (-١): نأخذ القاعدة ق (س) = $\text{س}^3 - 2$ كون $-1 > 1$

$$\text{ق (-١)} = (1 - 2) - 2 = -1 - 2 = -3$$

مثال (٢):

أي من الاقتارين ق_١ (س) = $2 - 2$ ق_٢ (س) = $2 - 2$

$$\text{ق (٢)} = \text{س}^2 - 4 + 5 \quad \text{واحد لواحد؛}$$

الحل:

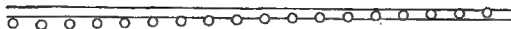
نمثل الاقتارين بيانياً ونستخدم اختيار الخط الأفقي هكذا:

$$\text{ق (٢)} = 2 - 2 \quad \text{عندما س = صفر، ق (٠)} = 2 - 2 = 0$$

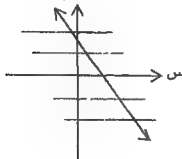
$$\text{وعندما ق (س) = 0، } 2 - 2 = \text{صفر}$$

$$\text{س} = 1$$

الاقتراعات الجبرية



ص = ق (س)



س	١	٠
ق	٠	٢

∴ ق_١ (س) = ٢ - ٢ س اقتران واحد لواحد كون الخط الأفقي لا يقطع المنحنى إلا في نقطة واحدة.

$$ق_٢ (س) = س - ٢ س + ٥$$

$$٢ = \frac{٤}{٢} = \frac{(٤ -)}{١ \times ٢} = \frac{ب}{١٢}$$

ثم نكون الجدول التالي:

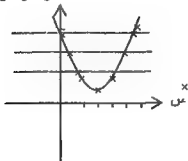
$$ق (٠) = ٥ + (٠) - ٢(٠) = ٥$$

$$ق (١) = ٥ + (١) - ٢(١) = ٤$$

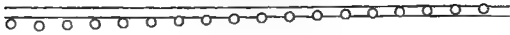
$$ق (٢) = ٥ + (٢) - ٢(٢) = ١$$

س	٤	٣	٢	١	٠
ق	٥	٢	١	٢	٥

ص = ق (س)



ق_٣ (س) = س - ٢ س + ٥ ليس اقتران واحد لواحد كون الخط الأفقي يقطع المنحنى أكثر من نقطة.



مثال (٣):

أعد تعريف الاقتران $|x - y|$ دون استخدام بقية القيمة المطلقة.

نجد اشارة $x - y$ هي هكذا:

هنا: $x - y = 0$ صفر

$x - y = 2$ (صفر) $x - y = -2$ صفر

أصفره - ٢ ، صفر ، ٢



$$\left. \begin{array}{l} - (x - y) = x - y, \quad x > y \\ x - y = x - y, \quad x \geq y \geq 0 \\ - (x - y) = x - y, \quad x \leq y \end{array} \right\} = |x - y|$$

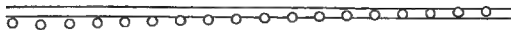
$$\left. \begin{array}{l} x - y = x - y, \quad x > y \\ x - y = x - y, \quad x \geq y \geq 0 \\ x - y = x - y, \quad x \leq y \end{array} \right\} =$$

مثال (٤):

إذا كان q (صفر) $= \frac{x}{1 - x}$ ، $x \neq 1$

هـ (صفر) $= \frac{x}{1 + x}$ ، $x \neq -1$

أوجد (ق ٥ هـ) (صفر) ، (هـ ٥ ق) (صفر)



الحل:

$$\frac{\frac{س}{1+س}}{\frac{1}{1} - \frac{س}{1+س}} = (-\frac{س}{1+س}) \text{ ق } = ((س) \text{ هـ}) \text{ ق } = (س) \text{ هـ} \text{ ق}$$

$$س = \frac{س}{1-س} = \frac{\frac{س}{1-س}}{\frac{1-س-س}{1-س}} = \frac{\frac{س}{1+س}}{\frac{(1+س)-س}{(1+س)(1)}} =$$

مجاله: ح

$$((س) \text{ هـ} \text{ ق}) \text{ هـ} = ((س) \text{ هـ} \text{ ق}) \text{ هـ} = (-\frac{س}{1-س})$$

$$\frac{س}{1-س} = \frac{\frac{س}{1-س}}{\frac{1-س+س}{1-س}} = \frac{\frac{س}{1-س}}{\frac{(1-س)+س}{(1-س)}} = \frac{\frac{س}{1-س}}{\frac{1}{1-س}} =$$

$$\{ -\frac{1}{4} \} \text{ ح -}$$

مثال (٥):

$$\text{إذا كان ق (س) = } \frac{1}{س} \text{ ، س } \neq \text{ صفر}$$

أوجد ق^١ (س) الاقتران العكسي.

الطريقة الأولى: (ق هـ ق^{-١}) (س) = س

$$\text{ق (ق}^{-١} \text{ (س))} = س$$

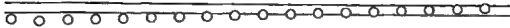
$$\frac{س}{1} = \frac{1}{\text{ق}^{-١} \text{ (س)}}$$

$$\frac{1}{س} = \text{ق}^{-١} \text{ (س)} = \text{س} \text{ وهو نفسه ق (س)}$$

الطريقة الثانية: نضع ص = $\frac{1}{س}$ ونجد س بدلالة ص

$$س = \frac{1}{ص}$$

الاقتراعات الجبرية



مثال (٧):

ما قيمة العدد الحقيقي ك التي تجعل هـ (س) = س + ٢ عاملاً من عوامل ق (س) = ٢ س + ٢ ك س - ٢ ك س + ٩٠ ؟

الحل:

نجد أولاً صفراً هـ (س) هكذا: س + ٢ = صفراً ← س = - ٢

والآن ليكن هـ (س) عاملاً من عوامل ق (س) يجب أن يكون ق (- ٢) = صفراً

ق (- ٢) = (٢ - ٢) ٢ + (٢ - ٢) ٢ ك + (٢ - ٢) ٣ - ٢ ك س + ٩٠ = صفراً

$$- ٩ + ٩ + ٩٠ = ٩٠ = \text{صفراً}$$

$$١٨ ك + ٣٦ = \text{صفراً}$$

$$٣٦ - ٣٦ = -$$

$$٣٦ - = ١٨ ك$$

$$٢ - = \frac{٣٦ -}{١٨} = ك$$

مثال (٨):

إذا كان ق (س) = ٣ س - ٥ ، فما قيم س التي تجعل ق (س) = ٤٢ ؟

$$٤٢ = ٥ - ٣ س$$

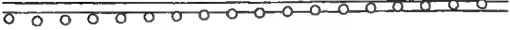
$$٥ + ٥ +$$

$$\frac{٤٨}{٣} = \frac{٣ س}{٣}$$

$$١٦ = ٣ س$$

$$٤ ، ٤ - = \sqrt{١٦} \pm = س$$

$$\therefore \text{قيم س} = \{ ٤ ، ٤ - \}$$



مثال (٩):

مصنع للسجاد يُنتج س سجادة يومياً بقياس معين، تكلفتها الكلية تساوي (٣٠ س + ٢٥) ديناراً، ويبيع السجادة الواحدة بمبلغ ٧٥ ديناراً، ما قيمة ربح المصنع بالدينار إذا باع في أحد الأيام ١٢ سجادة؟

بما أن الربح = الإيراد - التكاليف

$$\text{فإن ق (س)} = (\text{س} \times ٧٥) - (٣٠ \text{ س} + ٢٥)$$

$$\text{ومنها ق (س)} = ٧٥ \text{ س} - ٣٠ \text{ س} - ٢٥ = ٤٥ \text{ س} - ٢٥$$

$$\therefore \text{ق (س)} = ٤٥ \text{ س} - ٢٥$$

$$\therefore \text{الربح ق (س)} = (١٢) = (١٢) (٤٥) - ٢٥$$

$$= ٤٨٠ - ٢٥ = ٤٥٥ \text{ دينار}$$

مثال (١٠):

اكتب قاعدة ق (س) كثير الحدود من الدرجة الثانية (تربيعي) إذا علمت

$$\text{أن ق (١)} = \text{صفر} ، \text{ق (- ١)} = ٦ ، \text{ق (٠)} = ٢$$

القاعدة العامة: ق (س) = $٢ \text{ س}^٢ + \text{ب س} + \text{ج}$. $١ \neq \text{صفر}$

$$\text{والآن: ق (١)} = (١) = ٢(١) + \text{ب} + \text{ج} = \text{صفر}$$

$$\text{أي أن } ٢ + \text{ب} + \text{ج} = \text{صفر} \quad (١)$$

$$\text{وكذلك: ق (- ١)} = (- ١) = ٢(- ١) + \text{ب}(- ١) + \text{ج} = ٦$$

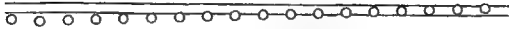
$$\text{أي أن } - ٢ - \text{ب} + \text{ج} = ٦ \quad (٢)$$

$$\text{وكذلك ق (٠)} = (٠) = ٢(٠) + \text{ب}(٠) + \text{ج} = ٢$$

$$\text{أي أن } \text{ج} = ٢ \quad (٣)$$



الاقتترانات الجبرية



وهكذا لدينا النظام من المعادلات:

$$أ + ب + ٢ = \text{صفر}$$

$$(٤) \quad ٢ - = ب + أ$$

$$(٤) \quad ٢ - = ب + أ$$

$$(٥) \quad ٤ = ب - أ \quad \text{جمعاً}$$

$$\text{وكذلك:} \quad ٦ = ٢ + ب - أ$$

$$\hline ٢ = ١٢$$

$$(٥) \quad ٤ = ب - أ \quad \therefore$$

$$\textcircled{١ = أ}$$

$$\textcircled{٢ - = ب} \longleftarrow ٢ - = ب + ١ \longleftarrow ٢ - = ب + ١ \text{ لكن}$$

\therefore ق (س) = ١ س^٢ - ٣ س + ٢ وهو كما ترى اقتران تربيعي.

مثال (١١):

$$\text{إذا كان ق (س) = } ٣ \text{ س}^٢ + ٦ \text{ س} - ٢$$

$$\text{هـ (س) = } -٣ \text{ س}^٢ + ٤ \text{ س} - ٥$$

ما درجة كل من الاقتترانات التالية:

$$\text{ق (هـ) (س) ، (ق - هـ) (س) ، (ق ، هـ) (س)}$$

$$\text{ق (هـ) (س) = (٣ س}^٢ + ٦ \text{ س} - ٢) - (-٣ س}^٢ + ٤ \text{ س} - ٥)$$

$$= ٣ \text{ س}^٢ + ٦ \text{ س} - ٢ - ٣ \text{ س}^٢ + ٤ \text{ س} - ٥ =$$

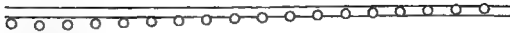
$$١٠ \text{ س} - ٧ \quad \text{ومن الدرجة الأولى.}$$

$$\text{ق - هـ (س) = (٣ س}^٢ + ٦ \text{ س} - ٢) - (-٣ س}^٢ + ٤ \text{ س} - ٥)$$

$$= ٣ \text{ س}^٢ + ٦ \text{ س} - ٢ - ٣ \text{ س}^٢ + ٤ \text{ س} - ٥ =$$

$$٦ \text{ س}^٢ + ٢ \text{ س} + ٣ \quad \text{ومن الدرجة الثانية}$$

الاقتارات الجبرية



(ق-هـ) (س) = (٣ س^٢ + ٦ س - ٢) (- ٢ س^٢ + ٤ س - ٥) بقانون التوزيع

$$= - ٩ س + ١٢ س^٢ - ١٥ س^٢ - ١٨ س^٢ + ٢ س^٢ + ٢٤ س^٢ - ٣٠ س^٢ + ٦ س^٢ - ٨ س^٢ + ١٠$$

$$= - ٩ س^٤ + ٦ س^٢ + ١٥ س^٢ - ٣٨ س^٢ + ١٠ ومن الدرجة الرابعة$$

مثال (١٢):

أوجد مجموعة الحل للمعادلة س^٥ - ٢٥٦ س = صفر في حقل الأعداد الحقيقية.

س^٥ - ٢٥٦ س = صفر اخراج س كعامل مشترك

س (س^٤ - ٢٥٦) = صفر تحليل الفرق بين مربعين

$$س (س - ١٦) (س + ١٦) = صفر$$

س = صفر

$$س + ١٦ = صفر \leftarrow س = - ١٦$$

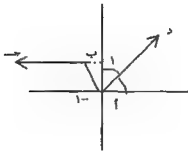
$$س - ١٦ = صفر \leftarrow س = ١٦$$

$$س + ١٦ = صفر مميزها ب^٢ - ٤ أ ج = (٠) - ٢ = ١٦ × ١ × ٤ - ٦٤ > صفر$$

ليس لها جذور في حقل الأعداد الحقيقية.

مجموعة الحل = { - ١٦ ، ٠ ، ١٦ } جذور حقيقية والباقي في حقل الأعداد المركبة كما سيأتي:

مثال (١٣):



اكتب قاعدة الاقتران الممثل منحناه بالشكل.

منحنى الاقتران تكون من ثلاثة أجزاء

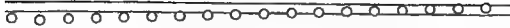
$$ب ج يمثل ك (س) = ١ \quad ٠ \leq ١$$

$$ب أ يمثل ل (س) = - س \quad ٠ \leq ١$$

$$أ د يمثل هـ (س) = س \quad ٠ \leq س$$



الاقتراعات الجبرية



وعند جمعها باقتران واحد متشعب يكون ق (س):

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \geq s \\ 0 \geq s \geq 1 - \\ s \geq 0 \end{array} \right\} = \text{ق (س)} = \begin{array}{l} 1 \\ s \\ s \end{array}$$

مثال (١٣):

طلب من أحد البنائين اكمال سور من الحجر، فوجد أنه تم بناء ٨٥ حجراً قبل أن يبدأ بالعمل به، فإذا قام هذا البناء ببناء ٣٥ حجراً يومياً حتى اكتمل بناء السور خلال سبعة أيام، والمطلوب اكمال الجدول التالي، ثم كتابة قاعدة النمط التي تبين عدد الحجارة المبنية في السور كاقتران في المتغير س.

ليام العمل	عدد الحجارة بعد البناء	مجموع الحجارة التي بنيت
١	$1 + 85$ (٣٥)	١٢٠
٢	$2 + 85$ (٣٥)	١٥٥
٣	$3 + 85$ (٣٥)	١٩٠
٤	$4 + 85$ (٣٥)	٢٢٥
٥	$5 + 85$ (٣٥)	٢٦٠
٦	$6 + 85$ (٣٥)	٢٩٥
٧	$7 + 85$ (٣٥)	٣٣٠
⋮		
س	$س + 85$ (٣٥)	$٣٥ س + 85$

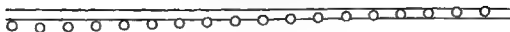
∴ ق (س) = $٣٥ س + 85$ وهذا الاقتران ناتج النمط السابق.

مثال (١٤):

ما مجال كل من الاقترانات التالية:

$$(i) \text{ ق (س)} = \left. \begin{array}{l} 1 + s^2 \\ 5 - s \end{array} \right\} \begin{array}{l} s \geq 1 \\ s > 1 \end{array}$$

الاقتارات الجبرية



الحل:

مجال القاعدة الأولى $(-\infty, 1]$

ومجال القاعدة الثانية $(1, \infty)$

∴ مجال الاقتران $= (-\infty, 1] \cup (1, \infty) = (-\infty, \infty)$

كما في الشكل

الجواب: المجال ح

$$(ii) \text{ ق (س) } = \frac{2}{2 - س}$$

نستثني أصفار المقام من ح هكذا:

$$2 - س \neq \text{صفر}$$

$$\frac{2 - س}{2 - س} \neq \frac{2 - س}{2 - س}$$

$$س \neq 2$$

فالجواب: مجال الاقتران = ح - {2} أو $س \neq 2$

$$(iii) \text{ ق (س) } = \frac{2 + س}{6 - س - س^2}$$

نستثني أصفار المقام من ح هكذا:

$$6 - س - س^2 \neq \text{صفر}$$

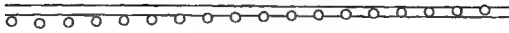
$$(س - 2)(س + 3) \neq \text{صفر}$$

$$س \neq 2, 3$$

الجواب: مجال الاقتران = ح - {2, 3} أو $س \neq \{2, 3\}$



الاقتارات الجبرية



$$(iv) \text{ ق (س) } = \sqrt{s-1}$$

إذا كان دليل الجذر زوجياً فإن ما بداخله يجب أن يكون موجباً أو صفراً
أي: $s - 1 \neq \text{صفر}$

$$s \neq 1$$

الجواب: مجال الاقتاران $= (1, \infty)$

$$(v) \text{ ق (س) } = \sqrt[4]{s-4}$$

$$s - 4 \leq \text{صفر}$$

$$s \geq 4$$

س ≥ 4 (انعكست إشارة الترتيب أو التباين لأننا ضربنا بكمية سالبة)

الجواب: مجال الاقتاران $= [4, \infty)$

$$(vi) \text{ ق (س) } = \frac{5}{\sqrt[3]{s-3}}$$

بما أن الجذر في المقام فيجب أن يكون ما بداخله موجباً فقط (ليس صفراً
وليس سالباً) هكذا:

$$s - 3 > \text{صفر}$$

$$\frac{s-3}{3} < \frac{s-3}{2} < \frac{s-3}{1}$$

$$\text{الجواب: مجال الاقتاران} = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

$$(vii) \text{ ق (س) } = \frac{\sqrt{s+2}}{s-1}$$

نستثنى من ح أصفار المقام ونجد مجال البسط أيضاً هكذا:

$$\text{مجال البسط: } s + 2 \leq \text{صفر} , \quad s \leq -2$$

$$\text{مجال المقام} = s = 1$$

$$\text{مجال الاقتاران} = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$



مثال (۱۵):

إذا كان $q(s) = s^2 + s - 1$

$$1 + s^{-2} = (s)$$

أوجد: (i) (ق + هـ) (١)

الحل: $(1 + 1 - 1(1)) + (1 - 1 + 1(1)) = (1) هـ + (1) ق = (1) (هـ + ق)$

$$(1 + \cancel{1}) + (\cancel{1} - \cancel{1} + 1) =$$

$$Y = (1) + (1) =$$

أو نجد: $(ق + هـ)(س) = (س^٢ + س - ١) + (س^٢ - س - ١) = ٢س^٢ - ٢$

ونعوض بدل س = ١ هكذا (ق + هـ) = (١) $\gamma = (١)$ $\gamma = {}^v(١)$ $\gamma = (١)$

$$(1 + 1 - 1) - (1 - 1 + 1) = (1) - (1) = (1) - (1) \quad (ii)$$

$$(1 + \cancel{y} - \cancel{x}) - (\cancel{y} - \cancel{y} + 1) =$$

$$\text{صفر} = (1) - (1) =$$

أو نجد: $(ق - هـ) (س) = (س) (س + ٢ - س - ١) = (س) (١ + س - ٢)$

$$1 - m + \frac{1}{2}m - 1 - m + \frac{1}{2}m =$$

ونعوض بدل س = ١ هكذا: (ق-هـ) $٢ = (١) ٢ - ٢ = ٢ - ٢ = ٠$ صفر

$$(1 + 1 - \gamma_1)(1 - 1 + \gamma_1) = (1)_{\underline{h}} \cdot (1)_{\underline{q}} = (1)_{(\underline{h} \cdot \underline{q})} \text{ (iii)}$$

$$(1 + 1 - 1)(1 - 1 + 1) =$$

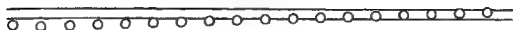
$$1 = (1)(1) =$$

أو نجد (ق ٠ هـ) $(s + y - s - s)(1 - s + y - s) = (s)$ قانون التوزيع

$$1 - s + s^2 - s + s^2 - s^2 + s^2 + s^2 - s^4 =$$

$$1 - s_1 + s_2 - s_3 = 0$$

الاقتراحات الجبرية



ونعوض بدل س = ١ هكذا (ق ٠ هـ) = (١) = ١ - ١ + ٢(١) - ١

$$١ = ١ - ٢ + ٢ - ١ =$$

(iv) (ق ÷ هـ) (١)

$$١ = \frac{1 - 1 + 2}{1 + 1 - 2} = \frac{(١) ق}{(١) هـ} =$$

أو لنقسم ق (س) على هـ (س) كما يلي:

$$\begin{array}{r} ١ \\ ١ + س - ٢ \overline{) ١ - س + ٢} \\ ١ - س + ٢ \\ \hline ٢ - س \end{array}$$

$$\frac{٢ - س}{١ + س - ٢} + ١ = (س) (ق + هـ) (س)$$

$$\frac{صفر}{١} + ١ = \frac{٢ - (١) ٢}{١ + ٢ - ١} + ١ = (١) (ق + هـ) (١)$$

$$١ =$$

مثال (١٦):

$$حل المعادلة: |٢ س - ١| = |١ - ٥ س|$$

بعد ازالة رموز القيمة المطلقة:

$$\text{فإن } (٢ س - ١) \pm (١ - ٥ س)$$

$$\text{أي } ٢ س - ١ = ١ - ٥ س \text{ ، } ٢ س - ١ = - (١ - ٥ س)$$

$$\text{أي أن } ٢ س - ١ = ١ - ٥ س \text{ ، } ٢ س - ١ = - (١ - ٥ س)$$

$$٢ س + ٥ س = ١ + ١ \text{ ، } ٢ س - ٥ س = - (١ + ١)$$

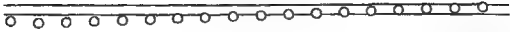
$$٧ س = ٢ \text{ ، } -٣ س = صفر$$

$$س = \frac{٢}{٧} \text{ ، } س = صفر$$

مجموعة الحل: { صفر ، $\frac{٢}{٧}$ }



الاقتراءات الجبرية



مثال (١٧):

ما قيمة $أ$ ، ب إذا كان

$$٥س - ٢س - ١ = أ \quad (س - ٥ + ٦) + ب \quad (س - ٤ + ٣) + ١٩ + (س - ٢ + ٣ + ٢)$$

بما أن الطرفين متساويين، وبما أنها كثيراً حدود من الدرجة الثانية، فسوف نبسط الطرف الأيسر هكذا:

$$٥س - ٢س - ١ = ١ = أ \quad ٥س - ٢س - ١ + ٦ + ١٩ + ٣ + ٢ + ١٩ + ٥٧ - ٢س + ٢٨ =$$

$$٥س - ٢س - ١ = ١ = أ \quad ٥س - ٢س + ١٩ + ٦ + ٣ + ٢ + ١٩ + ٥٧ - ٢س + ٢٨ + ب - ٤ - ١٥ - ١$$

هنا المعاملات المتناظرة متساوية ومنها:

$$(١) \quad ١٩ + ب + أ = ٥$$

$$(٢) \quad ٥٧ - ١٥ - ٤ - ٢ = -$$

$$(٣) \quad ٢٨ + ٣ + ١٦ = ١ - \quad \text{وبعد التبسيط}$$

$$(١) \quad ١٤ - = ب + أ$$

$$(٢) \quad ٥٥ = ب - ٤ - ١٥ -$$

$$(٣) \quad ٣٩ - = ب + ٣ + ١٦$$

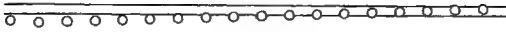
يكتب هنا المعادلتان $\left(\begin{array}{l} (١) \quad ١٤ - = ب + أ \\ (٢) \quad ٥٥ = ب - ٤ - ١٥ - \end{array} \right)$ ^{لحذف ب} والحل بالحذف

$$(١) \quad ٥٦ - = ب + ٤ + ١٤$$

$$(٢) \quad ٥٥ = ب - ٤ - ١٥ - \quad \text{جمعاً}$$

$$١ - = ١ -$$

$$\boxed{١ = ١}$$



مثال (١٨):

ما قيمة A التي تجعل $S = 3$ عاملاً من عوامل Q (س) $3 = S^2 + A^2 + S^2$

الحل:

حتى يكون $S = 3$ عاملاً من عوامل Q (س) يجب أن يكون $Q(3) =$ صفر

$$\text{وعليه في } Q(3) = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 27 + 9 + 9 = 45$$

$$= 27 + 9 + 9 = 45$$

$$45 = 3 + 9 + 81$$

$$81 - 9 = 72$$

$$72 - 9 = 63$$

$$\frac{63}{9}$$

مثال (١٩):

متى يكون الاقتران H (س) $= S + A$ عاملاً من عوامل Q (س) $\frac{N}{S} - \frac{N}{A}$

$N \neq 0$ ، $A \neq 0$ صفر؟

استنتج ذلك من الأمثلة العددية:

صفر الاقتران H (س) $= S + A =$ صفر $\leftarrow S = -A$

عندما $N = 1$ ، $\frac{N}{S} - \frac{N}{A} = S - A$

في $(-A) = (1) - A = 1 - A \neq 0$ صفر $\leftarrow S + A$ ليس عاملاً من عوامل Q (س)

عندما $N = 2$ ، $\frac{N}{S} - \frac{N}{A} = \frac{2}{S} - \frac{2}{A}$

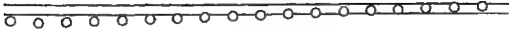
في $(-A) = (1) - A = 1 - A \neq 0$ صفر $\leftarrow S + A$ عاملاً من عوامل Q (س)

عندما $N = 3$ ، $\frac{N}{S} - \frac{N}{A} = \frac{3}{S} - \frac{3}{A}$

في $(-A) = (1) - A = 1 - A \neq 0$ صفر $\leftarrow S + A$ ليس عاملاً من عوامل Q (س)



الاقتراءات الجبرية



$$\text{لكن } 14 = - = ب + 1$$

$$\therefore 14 = - = ب + 1$$

$$\text{ب} = -15$$

للتحقق نأخذ المعادلة الثالثة:

$$29 = - = ب + 3 + 6$$

$$29 = - = 6 + (1) + 3 + (-15)$$

$$29 = - = 40 - 6$$

$$29 = - = 29 \text{ نعم}$$

$$\therefore 1 = 1$$

$$\text{ب} = -15$$

مثال (٢٠):

$$\text{إذا كان ق (س) = س}^2 - 1$$

$$\text{هـ (س) = س}^2 - 5$$

$$\text{هل (١) ق (٢) = هـ (س)}$$

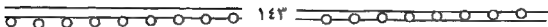
$$\text{وهل (٢) ق (س) = هـ (س) ولماذا؟}$$

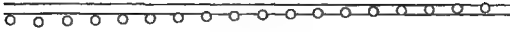
$$\text{ق (٢) = (٢)}^2 - 1 = 1 - 4 = 1 - 3$$

$$\text{هـ (٢) = (٢)}^2 - 5 = 4 - 5 = 0 - 1$$

$$\therefore \text{ق (٢) = هـ (٢)}$$

لكن ق (س) \neq هـ (س) باختلافهما بالدرجة





$$\text{والبيان ق (5) } = 5^2 - 1 = 24 = 24$$

$$\text{هـ (5) } = 5^2 - 125 = 0 = 120$$

وعليه فإن ق (5) \neq هـ (5) وبشكل عام فإن ق (س) \neq هـ (س)

ولكن ق (2) = هـ (2) كان حالة خاصة فقط.

$$\text{عندما } 2 = 2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{ق (-1) = (-1) - 1 = -2 = 1 - 1 = 0 \text{ صفر} \leftarrow \text{س + 1 عامل من عوامل ق (س)}$$

⋮

وعلى نفس النمط إذا أكملنا الحل فإننا نستنتج أن:

$$\text{هـ (س) = س + 1 عامل من عوامل ق (س) } = 2 - 1 = 1 \text{ عندما ن عدد طبيعي زوجي}$$

$$\text{إن هـ (س) = س + 1 ليس عامل من عوامل ق (س) } = 2 - 1 = 1 \text{ عندما ن عدد طبيعي فردي.}$$

(٨ - ١٣) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) ما العلاقة بين أ ، ب التي تجعل كثير الحدود:

$$ق (س) = ٢س - ٤س + ٧س + ١س + ب يقبل القسمة على هـ (س) = س - ٣$$

{ ارشاد: ق (٣) = صفر }

$$(٢) حل المعادلة ٤س - ٢س + ٢٤س + ٢س + ٢٣س + ١٨ = صفر$$

$$\left\{ ٩ , ٢ , \frac{١}{٢} - \right\}$$

{ ارشاد: استعن بنظرية العوامل والقسمة والتركيبية }

(٣) حل كثير الحدود:

$$ق (س) = ٢س - ٢س + ٧س - ٣س + ١٨ الى عوامله الأولية$$

$$\{ (٣ - س) (٢ - س) (٣ + س) \}$$

$$(٤) إذا كان ق (س) = ٢س - ٣س + ١س$$

$$هـ (س) = ٢س$$

$$ل (س) = ٢س - ٢$$

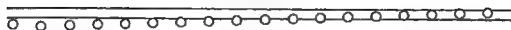
أوجد ق هـ ٠ ل ٠ (س)

$$\{ ٤س - ٢س + ٢٢س + ٢٩س \}$$

$$(٥) إذا كان ق (س) = س + ١ ، هـ (س) = \frac{١}{س}$$

أوجد هـ ق (س)

$$\left\{ \frac{١ + س}{س} \right\}$$



(٦) حلل الاقتران ق (س) = س^٢ + س^٢ - ١٣ س - ١٥ الى عوامله الأولية.

$$\{(س - ٣) (س + ١) (س + ٥)\}$$

{ ارشاد: استعن بنظرية الباقي والقسمة }

(٧) أوجد باقي قسمة ق (س) = س^٤ - س^٢ + س - ٧ على هـ (س) = س + ٢

$$\{ ٢٣ \}$$

(٨) ما باقي قسمة ق (س) = س^٤ - س^٣ + س^٢ + س^٢ - س^٢ - س^٢ على هـ (س) = س + ٢

$$\text{على هـ (س) = س}^٢ - \text{س} + \text{س} + \text{س}^٢$$

{ ارشاد: استعن بالقسمة الطويلة }

(٩) ما خارج قسمة ق (س) = س^٣ - س^٤ + س^٢ + س^٢ - ١١ س

$$\text{على هـ (س) = س}^٣ - \text{س}^٢$$

(١٠) إذا كان ق (س) = س ، هـ (س) = س^٢

أوجد (i) ق (هـ (س)) (ii) هـ (ق (س))

(iii) ماذا تستنتج وكيف تفسر ذلك؟

{ ارشاد: ق (س) = س اقتران معايد }

(١١) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات:

$$\{ -١ , ٢ \}$$

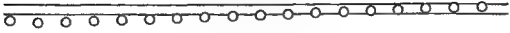
$$(١) |س - ١| = ٢$$

$$\{ -١ , ٠ , ١ \}$$

$$(٢) |س| = |س|$$

$$\{ ٠ \}$$

$$(٣) س + ٤ = س - ٤$$



(١٢) إذا كان ق (س) $2 = 9س^2 - 9س + 3$

$$\text{هـ (س)} = 2 - 3$$

أوجد $\left(\frac{-ق}{هـ}\right) (١)$ { صفر }

(١٣) إذا كان ق (س) $= 4س^2 + 2س$ أوجد:

ق (١) ، ق (٢) ، ق $(\sqrt{3})$ ، ق (٠) ، ق (-١)

(١٤) إذا كان ق (س) $= 2س^2 + س + ١$ ، هـ (س) $= 2س - ١$

أوجد (ق + هـ) (٥) (ق - هـ) (٥)

(ق ٠ هـ) (٥)

(١٥) إذا كانت ق (س) $= \frac{س}{س - ١}$ ، س $\neq ١$

هـ (س) $= \frac{س}{س + ١}$ ، س $\neq -١$

أوجد (ق ٥ هـ) (س) ، (هـ ٥ ق) (س)

{ س ، س }

(١٦) حلل الاقتران ق (س) $= 2س^2 - 2س + ٤$ إلى عوامله

{ (س - ٢) (س - ١) (س + ٢) }

وكذلك الاقتران ق (س) $= 2س^2 + ٢س + ٣$

{ (س + ١) (س - ٢) (س + ٣) }

ثم كذلك الاقتران ق (س) $= 4س^2 + ٤$

{ (س - ٢) (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) }

{ ارشاد: استعن باكمال المربع }



(١٧) إذا كان ق (س) = $٣س^٢ + ١$ ، هـ (س) = $٢س + ١$

أوجد (ق - هـ) (س) ، $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$ (س) ومجال كل منهما.

(١٨) إذا كان ق (س) = $\frac{١ - س}{٤ + س^٢}$ فما قيمة ق (٢)

$\left\{ \frac{١}{٨} \right\}$

(١٩) أوجد مجال كلاً من الاقتراانات التالية:

(١) ق (س) = $\sqrt{٤ + س^٢}$ ، ح = $(-\infty, \infty)$

(٢) ق (س) = $\frac{٨ - س^٢}{١٦ - س^٢}$ ، ح = $\{٤ \pm\}$

(٢٠) إذا كان ق (س) = $س^٢ + ٣س + ١$

هـ (س) = $س^٢ + ٢س + ١$

أوجد (ق + هـ) (١) ، (ق - هـ) (١)

$\{١, ٩\}$

(٢١) أوجد مجال الاقتران ق (س) = $\frac{س^٢ + س - ٢}{س^٢ + ٥س - ٦}$

ح = $\{-٦, ١\}$

(٢٢) إذا كان ق (س) = $١ - س + س^٢$ ، ضع أحد الرموز < ، > ، = داخل

الدائرة في العبارة ق (-١) \bigcirc ق (٠) لتصلح صواب.

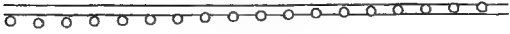
(٢٣) أوجد الأصفار الحقيقية للاقتراانات الحقيقية التالية:

(١) ق (س) = $س^٢ + ٦س$ $\{-٦, ٠\}$

(٢) ق (س) = $س^٢ - ٤س - ٥$ $\{-١, ٥\}$

(٣) ق (س) = $س^٣ + ٢س + ١$ { لا يوجد أصفار حقيقية كون

ب-٢-٤ أ ج > صفر }



(٢٤) إذا كان ق (س) $\sqrt[3]{4س - 1}$ هـ (س) $\sqrt[3]{س - 1}$

أوجد مجال ل (س) = ق (س) هـ (س) $\{ -1, 2, 12 \}$

{ ارشاد: مجال ل (س) = مجال ق (س) \cap مجال هـ (س) }

(٢٥) إذا كان ق (س) $\frac{1}{س}$ ، س \neq صفر هـ (س) $\sqrt[3]{س}$ ، س \leq صفر

أوجد مجال ل (س) = ق (س) + هـ (س) { س < صفر }

{ ارشاد: مجال ل (س) = مجال ق (س) \cap مجال هـ (س) }

(٢٦) إذا كان ق (س) $س + 5$ هـ (س) $4س^2 - 1$

أوجد مجال ق (س) ÷ هـ (س) { ح - $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ }

{ ارشاد: مجال ل (س) = مجال ق (س) \cap مجال هـ (س) }

(٢٧) إذا كان ق (س) $\frac{س}{س - 1}$ بين أن ق (٥) (س) = س

(٢٨) إذا كان ق (س) $2س^2 + س - 4$ هـ (س) $3س^2 - 2$

أوجد: (١) ق + هـ (١ -)

(٢) ق هـ ($\frac{1}{2}$) { $\frac{22}{4}$ - }

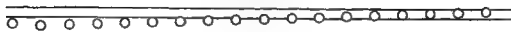
(٣) ق هـ (١) { ٦ }

(٢٩) إذا كان اقتراح الايراد د (س) $5س^2 - \frac{س}{10}$ ، واقتراح التكلفة

ك (س) $4س^2 - 24س + 38$ وكان اقتراح الربح د (س) = د (س) - ك (س)

أوجد: د (١) ، د (٢) وصنف النواتج الى مكسب أو خسارة.

{ خسارة ١٣.١ ، مكسب ١٢.٤ }



(٣٠) أوجد مجال الاقتران ق (س) = $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3س}}{س}$ ، س \neq صفر

{ ارشاد: مجال الاقتران = مجال البسط \cap مجال المقام }

{ -1 ، 3 ، صفر ، (صفر ، ∞) }

(٣١) أوجد مجال الاقتران ق (س) = $\frac{1 + \sqrt{3س}}{\sqrt{3س}}$ ، س \neq صفر

(٣٢) أوجد مجال الاقتران ق (س) = $\left. \begin{array}{l} 2س ، 2س - 4 \geq 1 \\ 3 > 0 ، 3 \end{array} \right\}$

{ (6 ، 0) \cup [-4 ، -1] }

(٣٣) أوجد مدى كل من الاقترانات:

(١) ق (س) = 1 - المدى = { 1 - }

(٢) ق (س) = 3س - 2 لكل س > 4

المدى = (- ∞ ، 10]

(٣٤) إذا كان ق (س) = 1 + 2س ، هـ (س) = 3س - 1

أوجد ق (هـ) (-1) ، (هـ) ق (-1) { 1 ، 2 }

(٣٥) ما قيمة العدد أ إذا كان ق (س) = 3س - 2س + 2 يقبل القسمة على

هـ (س) = 3س + 2 دون باقي. { -4 }

(٣٦) ما قيم كل من أ ، ب ، ج ، د ليكون الاقتران ق (س) = الاقتران ق (س)

حيث ق (س) = (3س + 1)س + 2 (3س - 1)س + 2

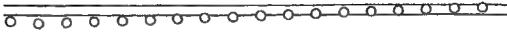
ق (س) = (3س - 1)س + 2 (3س + 1)س + 2

{ 2 ، 3 ، -1/2 ، 5/2 }

{ ارشاد: تساوي المعاملات المتناظرة وتكوين معادلات جبرية }



الاقتارات الجبرية



(٣٧) حل المعادلة $ص^٤ + ٢ص^٣ - ٧ص^٢ - ٨ص + ١٢ = صفر$

$$\{٢، ١، ٢، -٢، -٣\}$$

{ ارشاد: استعن بنظرية العوامل }

(٣٨) اذا علمت أن سرعة الصوت في الهواء تعتمد على درجة حرارته، وكما ورد

في العلاقة التالية:

$$ع = ١٠٩٠ + ١.١٤ (ف - ٣٢)$$

حيث ع سرعة الهواء وتقاس ب قدم / ث

ف درجة حرارة الهواء وتقاس ب الدرجات الفهرنهايتية

احسب سرعة الصوت في الهواء وبدرجة ٩٨ فهرنهايت.

$$\{٢٤ و ١١٦٥ \text{ قدم / ث}\}$$

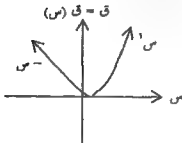
(٣٩) إذا كان الاقتران ق (س) = $١ + ١س + ب ص^٢$ حيث أ ، ب ح وكانت

النقط (٢ ، -٧) ، (-١ ، -٤) تقع على منحناه.

$$\{٢، -٣\}$$

أوجد قيمة كل من أ ، ب

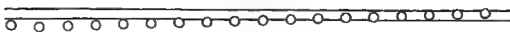
(٤٠) اكتب قاعدة الاقتران ق (س) الممثل بمنحناه بالشكل



{ ارشاد: متشعب }

(٤١) أعد تعريف الاقتران ق (س) = $|٣ - س| + ٥$ ومثله بيانياً على المستوى

الديكارتي.

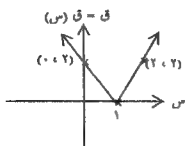


(٤٢) اعتمد على الشكل

والذي يمثل منحني الافتراض

ق (س) = |أ س + ب| في إيجاد منحني

أ ، ب { ٢ - ، ٢ }



$$\left. \begin{array}{l} \text{أ س + ب ، س} \leq 1 \\ \text{أ س - ب ، س} > 1 \end{array} \right\} \text{إرشاد: أعد تعريف ق (س) هكذا:}$$

(٤٣) أوجد مجموعة الحل للمتباينة $2 > [1 + س] > 4$

{ (٢ ، ٢) }

{ إرشاد: [١ + س] = ٣ }

(٤٤) إذا كان ق (س) = ٣ س + ٥ ، هـ (س) = { $\begin{array}{l} \text{س} + ١ ، \text{س} \leq ٢ \\ \text{س} - ٧ ، \text{س} > ٢ \end{array}$ }

أوجد ق (٥ هـ) (٠) ، (٥ هـ ق) (٠)

{ ٩ ، ١٥٢ }

(٤٥) أي من الافتراضات التالية يمثل افتراض واحد أو أكثر.

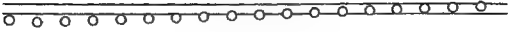
ق (س) = س^٢ ، ق (س) = س^٢ ، ق (س) = س ، ق (س) = ١

{ الأول والثالث }

$$\left. \begin{array}{l} |س| ، س > ٥ \\ [س] ، ٥ > س \geq ٥ \\ \frac{1}{س} ، س \leq ٥ \end{array} \right\} = \text{ (٤٦) إذا كان ق (س) = }$$

أوجد قيمة ق (- ٥) ، ق (٥) ، ق (٠) ، ق (- $\frac{1}{٢}$) ، ق ($\frac{1}{٢}$) ، ق (- ٦) ، ق (٦)

{ - ٥ ، $\frac{1}{٥}$ ، ٠ ، - ١ ، ٠ ، ٦ }



(٤٧) أعد تعريف كلاً من الاقتربات التالية:

$$(١) \text{ ق (س) } = |س - ٢| + ١$$

$$(٢) \text{ ق (س) } = ٢س + \left[\frac{١}{٢} - ١ \right] \text{ ، في الفترة } \left[\frac{١}{٤} - ١ , \frac{١}{٤} \right]$$

{ ارشاد: لتعريف نقطة البداية في الاقتران الثاني اجعله مساوياً للصفر }

$$(٤٨) \text{ أوجد خارج قسمة ق (س) } = ٣س^٤ - ٥س^٢ + ٧س - ١١ - ١٣$$

$$\text{على هـ (س) } = ٣س - ٢$$

$$(٤٩) \text{ ما باقي قسمة ق (س) } = ١٠س^٧ - ١٠س^٦ + ٨س^٥ - ٧س^٢ + ٣س - ١١$$

$$\text{على هـ (س) } = ٥س^٢ - ٥س + ٤$$

{ ارشاد: قسمة طويلة }

$$(٥٠) \text{ ما باقي قسمة ق (س) } = ٥س^٤ - ٧س^٢ + ٨س - ٨$$

$$\text{على هـ (س) } = ٥س - ٤$$

{ ارشاد: ق (٤) }

$$(٥١) \text{ إذا كان ق (س) } = \frac{١ - ٢س}{١ + ٢س} \text{ ، هـ (س) } = \frac{٣ + س}{٣}$$

$$\text{ما مجال الاقتران } \frac{١ - ٢س}{١ + ٢س} \text{ (س) } \quad \text{حـ } \{ ١ , ١ - , ٠ \}$$

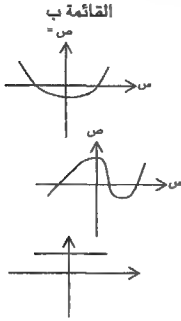
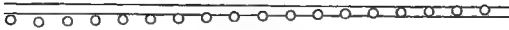
$$(٥٢) \text{ ما قيمة أ التي تجعل ق (س) } = ٢س^٢ - ٢س - ١ + ٣س - ٢ \text{ يقبل القسمة على}$$

$$\text{هـ (س) } = ٢س - ١ \quad \{ ٦ \}$$

$$(٥٣) \text{ ما درجة كثير الحدود ق (س) } = (٣س^٢ - ٢س) (٤س^٢ + ٤)$$

{ الخامسة }

{ ارشاد: أوجد حاصل ضربه! }



(٥٤) القائمة أ

ق (س) = س^٢ - ٤س + ٢

هـ (س) = ج

ل (س) = س^٢ - ٤ + ج

والمطلوب: صل بين قاعدة الاقتران

من القائمة أ مع منحناه

من القائمة ب

(٥٥) إذا كان ق (س) = س^٢ + ٣س - ٦ + ١

هـ (س) = س^٢ - ٥س + ٢

أوجد ناتج كل من (ق + هـ) (س) ، (ق - هـ) (س) ، (ق · هـ) (س)

(٥٦) رُسم مربع طول ضلعه س داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه على محيط الدائرة، اكتب الاقتران الذي يدل على المساحة المحصورة بين الدائرة والمربع.

(٥٧) إذا كان هـ (س) = س - ٢ عاملاً من عوامل ق (س) = س^٢ + ٢س - ١ - س - ٢
أوجد قيمة أ. { ٧ }

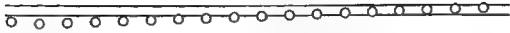
(٥٨) ما عرض سجادة بدلالة س إذا كانت مساحتها م (س) = ٢س^٢ + ٢٩س + ٦٠ وطولها ط (س) = ٢س + ٥

{ ارشاد: عملية قسمة طويلة أو تركيبيية }

(٥٩) اكتب قاعدة الاقتران كثير الحدود من الدرجة الثانية التي من عوامله (س - ١) (س + ٢) ، (س - ٤)

{ ارشاد: حاصل ضرب العوامل أو نظرية الباقي }

الاقترانات الجبرية



(٦٠) يُراد عمل علبة حلويات للأطفال مفتوحة مساحتها 108 سم^2 من لوح مربع من الكرتون طول ضلعه 12 سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانه الأربعة طول ضلع كل منها $s \text{ سم}$ وثني الأجزاء البارزة للأعلى كما في الشكل.



أوجد أبعاد العلبة (طولها وعرضها وارتفاعها)

$$\{ 3, 6, 6 \}$$

(٦١) حلل الاقترانات التالية الى عواملها الأولية:

$$(1) \text{ ق، (س) } = \text{س}^2 - 2\text{س} - 8$$

$$(2) \text{ ق، (س) } = 4\text{س}^2 - 36$$

$$(3) \text{ ق، (س) } = 2\text{س}^2 - 16$$

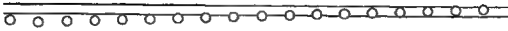
$$(4) \text{ ق، (س) } = \text{س}^2 - 7\text{س} - 6$$

(٦٢) وجد صاحب محل لبيع قطع الحاسوب أن اقتران ربحه $(\text{س}) = \text{س}^2 - 2\text{س} - 17$ حيث s عدد القطع المباعة، فإذا ربح المحل في يوم من 15 دينار ما عدد القطع التي باعها؟

(٦٣) إذا كان $h(\text{س}) = \text{س} - 1$ عامل من عوامل الاقتران $q(\text{س}) = 2\text{س}^2 - 3\text{س} - 5$ فما قيمة A ؟

(٦٤) مستطيل مساحته تمثل بالاقتران $q(\text{س}) = \text{س}^2 + 11\text{س} + 23$ 35 سم^2 وعرضه يُمثل بالاقتران $h(\text{س}) = 5\text{س} + 6$ سم اكتب الاقتران الذي يمثل طوله.
{ ارشاد: مساحة المستطيل = الطول \times العرض }





(٦٥) أي من الاقتربات التالية نسبته ؟ ولماذا؟

$$(١) \text{ ق١ (س) } = \frac{٥}{٥ - \sqrt{\text{س}}}$$

$$(٢) \text{ ق٢ (س) } = \frac{١ + \sqrt{\text{س}}}{١ + \sqrt{\text{س}}}$$

$$(٣) \text{ ق٣ (س) } = \frac{١}{٩ - \sqrt{\text{س}}}$$

$$(٤) \text{ ق٤ (س) } = \frac{١ - \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}$$

{ الأول والثاني }

(٦٦) بسّط الاقتربات النسبية التالية:

$$(٢) \frac{٢ + \sqrt{\text{س}} - ٤}{٩ - \sqrt{\text{س}}}$$

$$(٤) \frac{١ - \sqrt{\text{س}}}{١ - \sqrt{\text{س}}}$$

$$(١) \frac{١ + \sqrt{\text{س}} + ٢ + \sqrt{\text{س}}}{٢ + \sqrt{\text{س}}}$$

$$(٣) \frac{٢ - ١}{١ - \sqrt{\text{س}}}$$

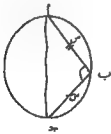
(٦٧) عدنان مجموعهما يساوي ٥ وحاصل العدد الثاني في مربع العدد الأول يساوي ١٢ فما العدنان؟

{ ٢ ، ٣ }

(٦٨) واحد من الاقتربات التالية: هم (س) = ٣ - س ، هم (س) = ٢ - س

هم (س) = ٣ + س ، هم (س) = ٢ - س

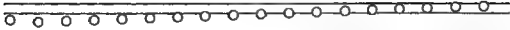
(٦٩) من الشكل المجاور اذا كان طول أ ب = طول ب ج = س م. والمثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب.



اكتب الاقتران الذي يدل على الفرق بين مساحة الدائرة ومساحة المثلث.

$$\left\{ \frac{١٥}{١٤} \sqrt{\text{س}} \right\}$$

{ ارشاد: أ ج يجب أن يكون قطراً ؟ لماذا؟ }



(٧٠) ما قيم (س، ص) التي تحقق المساواة (س، ص) = (٢ - س، ١)

$$\{1 \pm, 2\}$$

والمساواة:

$$\{2, 1 \pm\} \quad (س، ص) = (٢ + ص، ١٦)$$

(٧١) اكتب العلاقة التي قاعدتها ع = { (س، ص) = ص، س } عكس شكل مجموعة من الأزواج المرتبة ثم مكلها بياناً على المستوى الديكارتي.

(٧٢) اكتب خمسة أزواج مرتبة (عناصر) تنتمي للعلاقة ع = { (س، ص): ص = س + ١، س } ع

(٧٣) يُنتج مصنع أبواباً من الخشب الفاخر مستطيلة الشكل ذا مقاييس متباينة بحيث يكون طول كل منها (س) مثلي عرضه (ص)، فإذا أنتج المصنع أبواباً عرضها بالسنتيمترات ٨٥، ٩٠، ٩٥، ١٠٠، ١٠٥ سم اكتب قاعدة العلاقة التي تربط الطول بالعرض ثم أوجد مجالها ومداها.

$$\left\{ \begin{array}{l} (س، ص): ص = ٢س، مجالها ٨٥، ٩٠، ٩٥، ١٠٠، ١٠٥ \\ \text{مداها } ١٧٠، ١٨٠، ١٩٠، ٢٠٠، ٢١٠ \end{array} \right.$$

(٧٤) أي من العلاقة التالية اقتران؟ مع ذكر البيان:

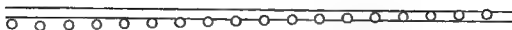
$$ع_١ = \{(١، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ٤)، (٤، ٥)\}$$

$$ع_٢ = \{(١، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ٤)، (٤، ٥)\}$$

(٧٥) أراد شخص زراعة حوض مستطيل طوله ١٠ متر وعرضه ٦ متر بالزهور والورود واحاطته بممر منتظم العرض، اكتب الاقتران الذي يربط عرض الممر (س) بمساحته ق (س) متر.

$$\{ \text{ارشاد: مساحة الممر} = \text{مساحة الحوض} + \text{الممر} - \text{مساحة الحوض} \}$$

$$ق (س) = ٤س + ٣٢$$



(٧٦) أي من الاقتارات التالية ليس واحداً لواحد مع بيان السبب؟

ق_١ (س) = ٥ س + ١ ، ق_٢ (س) = ٢ س ، ق_٣ (س) = ٢ س ، ق_٤ (س) = $\frac{1}{س}$ ،
س \neq صفر.

{ ارشاد: استعن باختبار الخط الأفقي } { الثاني }

(٧٧) إذا كان ق (س) = |٤ س - ٢| أعد تعريف الاقتران وارسم بيان منعناه على المستوى الديكارتي.

(٧٨) حل المعادلة |٢ س - ٣| = ٢ س { ٢ ، $\frac{1}{٢}$ }

(٧٩) هل العلاقة ع = |س| + |ص| = ٢ ، س ، ص \in أعداد صحيحة اقتران؟ وضّح بالأمثلة العددية.

{ لا ، $\sum_{١}^{ص} س$ }

(٨٠) إذا كان ق (س) = ١١ - ٣ س، أوجد قيمة:

ق (-١) ، ق (٠) ، ق ($\frac{1}{٣}$) ، ق ($-\frac{1}{٣}$) ، ق (١.٤)

(٨١) حل المعادلة ١١ - ٢ س = -١

{ ($\frac{1}{٣}$ ، ١) }

(٨٢) أوجد مجال كل من الاقتارات التالية:

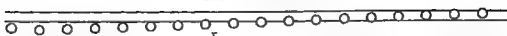
(١) ق (س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ { ٣ ، ٣ - ١ }

(٢) هـ (س) = $\frac{١ - س^٢}{٣٧ + س}$ { ٣ - ، -ح }

(٣) ل (س) = $\frac{٥ - س^٢}{٥ + س}$ { ح }

(٨٣) إذا كان ق (س) = { (١ ، ٣) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ١) }

اكتب قاعدة الاقتران ق^{-١} (س) على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة.



(٨٤) يَبْن كيف يكون الاقتران ق^{-١} (س) = $\sqrt{1 - س}$ اقتران عكسي للاقتران

$$ق (س) = س^2 + ١$$

{ ارشاد: استعن بعملية تركيب الاقتارات }

(٨٥) اذا كان ق (س) = س^٢ - س - ٣ فأوجد حلول المعادلات:

$$(١) ق (س) = صفر \quad \{ ١ - , ٣ \}$$

$$(٢) ق (س) = ٥ \quad \{ ٤ - , ٢ \}$$

$$(٣) ق (س) = -٤ \quad \{ ١ \}$$

(٨٦) اذا كانت أ = { ١ ، ٢ ، ٣ } وكانت ب = مجموعة كل المجموعات الجزئية

للمجموعة أ { وكانت العلاقة ع = { (س ، ص): س ، ص ∈ ب ، س > ص }

فهل العلاقة ع علاقة انعكاس أم تعدي أم تماثل أم تكافؤ؟

{ انعكاس وتعدي }

(٨٧) اذا كان ق (س) = س^٢ ، هـ (س) = $\sqrt{1 - س}$ ما قيمة (ق + هـ) (٨) ،

$$(ق - هـ) (٨) ، (ق \cdot هـ) (٨) ، (ق + هـ) (٨)$$

(٨٨) إذا كان ق (س) = (٣ + س)^٢ + (٣ - ب)^٢ س + ٢

$$هـ (س) = (٣ + س)^٢ + (٢ - ب)^٢ س + ٢$$

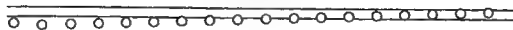
وكان ق (س) = هـ (س)

ضمن هذه المساواة، أوجد قيم المتغيرين أ ، ب $\{ -\frac{٧}{٢} ، -\frac{١}{٢} \}$

(٨٩) أجز عملية القسمة التالية (س^٥ - ٢) ÷ (س^٢ + ٢ س + ١)

(٩٠) إذا كان هـ (س) = س + ١ عاملاً من عوامل الاقتران ق (س) = س^٢ + ١

فاكتب العامل الآخر على شكل الاقتران هـ (س)



$$\{ \text{هـ (م)} = \text{س}^1 - \text{س}^0 + \text{س}^1 - \text{س}^2 + \text{س}^2 - \text{س}^3 + 1 \}$$

{ ارشاد: استعن بعملية القسمة سواء أكانت طويلة أو تركيبيه }

$$(91) \text{ حل الاقترانين ق, (س) } = 2 \text{ م}^0 - 4 \text{ م}^2 - 64$$

$$\text{ق (م)} = \text{س}^1 + 4 \text{ الى عواملها الأولية ولكن كلاً على انفراد}$$

(92) ما قيمة م التي تجعل س - 2 عاملاً من عوامل الاقتران

$$\text{ق (م)} = \text{س}^2 - 3 \text{ م}^2 + \text{م} - 1 \quad \left\{ \frac{0}{7} \right\}$$

وما قيمة ن التي لا تجعل س + 2 عاملاً من عوامل الاقتران

$$\text{ق (س)} = (2 + \text{ن}) \text{ س}^2 + 5 \text{ ن} + 1 \text{ بل تجعل باقي القسمة يساوي 6}$$

$$\left\{ \frac{7}{6} \right\}$$

(93) اذا كان ق (م) = 2 س + 1 ، ب قيمة م ليكون ق (س) = 13

$$\{ 6 \}$$

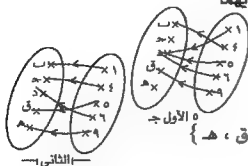
(94) اكتب مدى الاقتران الذي قاعدته ق (س) = 3 - 2 س

$$\text{ومجاله} = \{ -2 , -1 , 1 \}$$

$$\{ 0 , -2 , -3 \}$$

(95) اذا كان ق (م) = 3 س - 5 فما قيمة المتغير س عندما ق (س) = 949

(96) أي من الشكلين التاليين علاقة؟ وأيهما

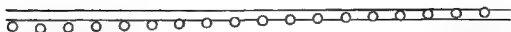


اقتران؟ وما مدى كل منهما؟

{ الأول اقتران مداه ب ، د ، ق

والثاني علاقة مداه ب ، ج ، د ، ق ، هـ }

الاقتارات الجبرية



(٩٧) بين فيما اذا كان المخطط السهبي العددي التالي يمثل اقتراناً على المجموعة



(٩٨) اذا كان الاقتران ق: ح \leftarrow ح حيث

$$ق(س) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$$

$$\{ق(س) = س^2\} \quad \text{اكتب قاعدته الجبرية}$$

(٩٩) إذا كانت الصورة العامة للاقتارات التربيعية ق(س) = $أس^2 + ب س + ج$

أوجد قيمة $\frac{ب}{أ}$ ، ق $\left(\frac{ب}{أ} \right)$ احداثيات رأس منحنى الاقتران التربيعي:

$$(1) ق(س) = 5س^2 + 2س - 1$$

$$(2) ق(س) = (س - 4)(س + 4)$$

$$(3) ق(س) = 4س^2 - 8س$$

(١٠٠) مثل الاقتران ق(س) = $س^2 - 4س - 1$ على المستوى الديكارتي ثم

أوجد احداثيات رأسه ومعادله محور تماثله.

(١٠١) اذا كان منحنى الاقتران ق(س) = $أس^2 + ب س + 2$ يمر بالنقطتين

$$(1, 1) \text{ و } (4, 10) \text{ أوجد قيمة كل من } أ ، ب \quad \{1, -2\}$$

$$(102) \text{ حل المعادلة } س^2 - 5س - 14 = 0 \quad \{7 \pm\} \quad \text{صفر}$$

$$\{ارشاد: س^2 = |س| \}$$

(١٠٣) إذا كان ق(س) = $2س - 7$ ، ه $\frac{س+1}{س-1} = ق(س)$ ، س ± 1 أوجد

هـ 5 ق(س) بأبسط صورة.

$$\left\{ \frac{س^2 - 2س}{4 - س} \right\}$$

$$\left\{ \frac{2}{7}, 2 - 2 \right\}$$

$$(104) \text{ حل المعادلة } 4 = \left| \frac{س^2 - 2س}{س} \right|$$

(١٠٥) يحتوي خزان ٦٢٥ م^٣ ماء، ويتناقص الماء كل يوم بمقدار ٢٥ متر مكعب

عن اليوم الذي قبله حسب الجدول:

كمية الماء المتبقية في الخزان م^٣ في نهاية اليوم:

$$\text{الأول: } ٦٢٥ - ١ \times ٢٥ = ٦٠٠ \text{ م}^٣$$

$$\text{الثاني: } ٦٢٥ - ٢ \times ٢٥ = ٥٧٥ \text{ م}^٣$$

$$\text{الثالث: } ٦٢٥ - ٣ \times ٢٥ = ٥٥٠ \text{ م}^٣$$

وهكذا يستمر على نفس النمط

والآن أجب عما يلي:

(١) اكتب قاعدة الاقتران التي تربط كمية الماء المتبقية في الخزان بعد س

$$\{ ٦٢٥ - ٢٥ \text{ س} \}$$

يوم.

(٢) بعد كم يوم يبقى في الخزان ٢٧٥ م^٣ من الماء؟ { ١٤ يوم }

(٣) بعد كم يوم ينفذ الماء من الخزان فيصبح فارغاً؟ { ٢٥ يوماً }

(١٠٦) تم ترتيب أعواد من الثقاب في الشكل وفق نمط معين كما يلي:



والآن أجب عما يلي:

(١) اكتب قاعدة النمط (الاقتران) { ق (ن) = ٣ ن + ٣ }

{ ارشاد: ابدأ بالجدول المرحلة العدد }

$$١ \leftarrow ٣ + ١ \times ٣ = ٦$$

$$٢ \leftarrow ٣ + ٢ \times ٣ = ٩$$

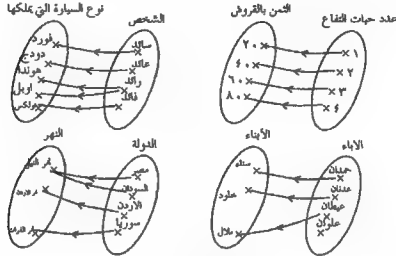
$$٣ \leftarrow ٣ + ٣ \times ٣ = ١٢$$

وهكذا...

الاقترانات الجبرية

(٢) إذا استمر النمط، وبهذا الشكل كم عدد أعواد الثقاب اللازمة لعمل المرحلة العاشرة؟
 {ق (١٠) = ٣ + ١٠ × ٣ = ٣٣ عود}

(١٠٧) ميّز العلاقة من الاقتران اعتماداً على مخططاتها السهمية التالية:

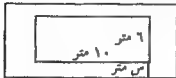


(١٠٨) لتشجيع زراعة الأشجار في الأردن تعرض وزارة الزراعة حوافز شخصية للمزارعين، إذ قدمت ٢٠ دينار مقابل كل دونم يزرع أشجاراً، أكمل الجدول التالي:

المساحة بالدونمات	١	٢	٣	٤	٥
المكافأة بالدينار	٢٠	٤٠

ثم اكتب قاعدة النمط أو الاقتران ق (س) الذي يمثل قيمة الحوافز.
 {ق (س) = ٢٠ س}

(١٠٩) أراد شخص زراعة حوض بالزهور على شكل مستطيل طوله ١٠ أمتار وعرضه ٦ أمتار واحاطته بممر منتظم كما في الشكل.



إذا كان عرض الممر ١ متر،
 اكتب الاقتران الذي يمثل مساحته
 ثم أوجد مساحته عندما

عرضه يساوي ١ متر {ق (س) = (١٠ + ٢ س) (٦ + ٢ س) - ٦٠}
 {إرشاد: مساحة الممر = مساحة الحوض والممر - مساحة الحوض}

الاقتراانات الجبرية



(١١٠) أوجد قاعدة كل من العلاقات التي تربط بين المتغيرين س ، ص ويبيّن

فيما اذا أصبحت هذه العلاقة اقتران أم ما زالت علاقة؟

س	٢	٥	٠	٦	٤
ص	٤	٢٥	٠	٣٦	١٦

$$\{ص = س^2\}$$

$$\{ص = |س|\}$$

س	-٢	-١	١	٢
ص	٢	١	١	٢

$$\{ص = س^2 - ١\}$$

س	٣	٥	٦	١٠
ص	٨	٢٤	٣٥	٩٩

$$\{ص = ٢س - ١\}$$

س	٥	٧	٩	١١
ص	٩	١٣	١٧	٢١

{وجميعها اقترانات}

(١١١) أي من الاقتراانات التالية غير خطي:

$$ق (س) = ٢ + س ، هـ (س) = \sqrt{٣س} - ١$$

$$ل (س) = \frac{١}{س} + ٥ ، ك (س) = \frac{٣}{٤} - ٢س \quad \{ل (س)\}$$

(١١٢) في إحدى القاعات المخصصة لاقامة الأفراح، اذا كانت تكلفة الشخص

المدعو ٣ دنانير وكان مدير القاعة يتقاضى مبلغ ٢٥٠ ديناراً بدل خدمات (مصرفات ثابتة)، ما تكاليف القاعة إذا كان عدد المدعوين ١٠٠ شخص، ٢٠٠ شخص؟

$$\{ق (س) = ٣س + ٢٥٠ \text{ حتى س عدد المدعوين}\}$$

(١١٣) اذا كان ق (س) = ٢ - ٣س.

$$\text{أوجد ق}(-١)، ق(\sqrt{٣}), ق(٠)، ق(\frac{١}{٣})$$

(١١٤) تنتج شركة مصانع الاسمنت الاردنية س طن يومياً، فإذا كانت تكلفة الطن الواحد ٧٥ دينار، وتدفع الشركة مصاريف أخرى ثابتة مقدارها ٥٠٠ دينار في اليوم، اكتب الاقتران الذي يربط تكاليف الانتاج بعدد الأطنان في اليوم الواحد.

$$\{ ق (س) = ٧٥ س + ٥٠٠ \}$$

(١١٥) أوجد ميل كل من الاقترانات (الاقتران الخطي يمثل بمسقيم بالهندسة التحليلية) :

$$ق (س) = ٦ س + ٩$$

$$ل (س) = ٧ - ٤ س$$

$$هـ (س) = ٨ + ٥ س$$

{إرشاد: اجعل الاقتران على صورة $ص = م س + ج$ حيث م الميل م = أ معامل س}.

(١١٦) كم درجة كل من الاقترانات التالية إن كانت من كثيرات الحدود؟

$$ق (س) = \sqrt[٢]{س} ، ق (س) = س (س^٢ - ١) ، ق (س) = لوي$$

$$ق (س) = \frac{٤}{س} ، ق (س) = س^٣ - ٣ س ، ق (س) = س^٢ + ٤ س - ٥$$

$$ق (س) = \frac{١}{٣} س^٢ + ٥ س ، ق (س) = \sqrt[٥]{٥ س} ، ق (س) = ٥ + ٥ س$$

(١١٧) وجد صاحب مصنع للثلاجات أن التكلفة الكلية للانتاج الاسبوعي

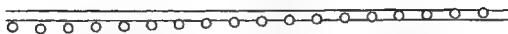
$$لثلاجات عددها (س) تقدر بالاقتران $ل (س) = س^٢ - ٢ س^٢ - ٧ س + ٦٠٠$$$

فإذا بيعت الثلاجة الواحدة بمبلغ ٥٠٠ دينار، جد اقتران الربح لبيع الثلاجات.

(١١٨) مثل منحني كل من الاقترانات التالية بيانياً على المستوى الديكارتي

وكلاً لوحده:

$$ق (س) = - ٥ ، ق (س) = ٣ س - ٤ ، ق (س) = س^٢ - ٤ س + ٢$$



(١٢٦) بسّط الاقتراانات النسبية التالية الى أبسط صورة ممكنة:

$$ق_1 (س) = \frac{س^2 - ٢}{س^3 - ٣س^2 + ٤س - ٤}$$

$$ق_2 (س) = \frac{س^3 + ٢س^2 - ٥س - ١٢}{س - ٤}$$

$$ق_3 (س) = \frac{س^3 + ٢س^2 - ٥س - ١٢}{س^2 + ٦}$$

(١٢٧) حل المتباينة $س^2 - ٧س < -٦$

(١٢٨) إذا كان $ق (س) = س^2 - ٤$ ، هـ $(س) = س^3 + ٣س^2 - ٧$

أوجد $(ق - هـ) (٢ -)$

(١٢٩) إذا كان باقي قسمة $ق (س) = س^3 + ٢س^2 - ٤س + ١$

على هـ $(س) = س + أ$ يساوي ٦ فما قيمة أ ؟

(١٣٠) إذا كان $ق (س) = س^3 - ٢س^2 + ٢س - ١$

أوجد $ق (٠)$ ، $ق (١)$ ، $ق (٢ -)$ ، $ق (هـ + د)$ ، $ق (س^2)$

(١٣١) حل الاقتران $ق (س) = ١ - س^3$ حيث $ن ط^3$ الى عوامله الأولية عندما ن

$٢ = ٣ = ٤ = ٥$ فقط.

{ ارشاد: استعن بالقسمة الطويلة إذا أمكنك }

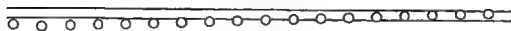
$$(١٣٢) حل المعادلة |س| = |س - ١| \quad \left\{ \frac{١}{٢} \right\}$$

والمعادلة:

$$|س| + ١ + ٢ + ٣ + |س + ١| - ٤ = \text{صفر} \quad \{ ٠ , ٢ - \}$$

$$(١٣٣) \text{ إذا كان } ق (س) = \left. \begin{array}{l} س , س > \text{صفر} \\ س^2 , \text{صفر} \geq س > ٥ \\ س^2 , س \leq ٥ \end{array} \right\}$$

أوجد $ق (-٥)$ ، $ق (\text{صفر})$ ، $ق (٥)$



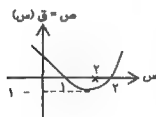
(١٣٤) إذا كان:

$$\left\{ \frac{1}{s-1} \right\} \quad (1) \text{ ق (س) } = 1 - \frac{1}{s} \text{ أوجد ق } (1)$$

$$\left\{ \frac{s}{2+s} \right\} \quad (2) \text{ ق (س) } = \frac{2+s}{s-1} \text{ أوجد ق } (1) \text{ (س)}$$

(١٣٥) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق (س) = $s^3 + s^2 + s + 3$

وأجب عن الأسئلة التالية:



(١) ما اسم منحنى ق (س) وما احداثيات رأسه؟

(٢) ما جذور المعادلة التربيعية المرافقة للاقتتران؟

(٣) اكتب قاعدة ق (س)

(١٣٦) إذا كان ق (س) = $2s^2 - 5s - 3$ أوجد قيمة ق (٢ - ٣) بدلالة أ.

(١٣٧) إذا كان ق (س) = $s^2 - 5$ ، هـ (س) = $s^3 - 9$ أجب عما يلي:

(١) هل ق (٢) = هـ (٢) ؟ { نعم }

(٢) هل ق (س) = هـ (س) ؟ { لا }

ماذا يعني ذلك؟

(١٣٨) إذا كان ق_١ (س) = $s^2 - 1$ ، ق_٢ (س) = $s^2 - 1$ ،

ما درجة كل من الاقتترانات:

(ق_١ + ق_٢) (س) ، (ق_١ - ق_٢) (س) ، (ق_١ · ق_٢) (س)

(١٣٩) اعتماداً على الشكل المجاور أوجد مساحة



الجزء المظلل بدلالة س ،

عندما س = ٧ سم أوجد مساحته بالسم^٢.

الاقترانات الجبرية

(١٤٠) يُقال في بعض الأحيان أن عدد عوامل كثير الحدود الأولية تساوي درجته،

هل ق (س) = س^٢ - ٧ س + ٦ يحقق هذه المقولة أم لا؟ { نعم }
بيِّن ذلك.

وهل ه (س) = س^٢ + ٤ س + ٦ س + ٩ يحقق هذه المقولة أم لا { لا }
بيِّن ذلك.

(١٤١) إذا كان باقي قسمة ق (س) = س^٢ + ٤ س + ٢ على (١ - س) يساوي مثلي باقي قسمة ق (س) على (١ + س) ما قيمة أ؟ { ١٠ ، ٢ }

(١٤٢) حل المعادلة س^٢ (س + ١) = ٤ س (س + ١) { ٢ ، ٠ ، ١ - ، ٢ - }
والمعادلة س^٤ = ٩

(١٤٣) جزئ الصيغة النسبية (الكسر) $\frac{١١س - ٧}{س٢ + ٢س - ٥س - ٦}$

{ ثلاثة كسور }

والكسر $\frac{س٢ - ٣س + ٢}{س٢ + ٢س - ٥س - ٦}$ { نحتاج قسمة طويلة }

(١٤٤) إذا كان (س - ١) عاملاً من عوامل ق (س) = س^٢ - ٧ س + ٦ الأولية
فأي من الاقترانات الآتية هي عوامل أولية أخرى للاقتران؟

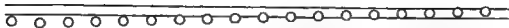
س - ٣ ، س + ١ ، س - ٦ ، س - ٢

(١٤٥) ما عدد أصفار الاقتران ق (س) = ٣ س^٢ + ٢ س - ٧ س - ٦

.. هل عددها ٣ أم ١٦ أم ٨ أم ٩

(١٤٦) إذا كان ق (س) = $\left. \begin{array}{l} ١ - س ، س \geq \text{صفر} \\ س ، \text{صفر} > س > ١ \\ س ، س \leq ١ \end{array} \right\}$

هـ (س) = $\left. \begin{array}{l} ٢ - س ، س \geq \text{صفر} \\ ٢ - س ، \text{صفر} > س > ١ \\ ١ - س ، س \leq ١ \end{array} \right\}$



اكتب قاعدة كل من الاقتربات:

$$(1) (ق + هـ) (س) \quad (2) (ق - هـ) (س)$$

$$(3) (ق \cdot هـ) (س).$$

(١٤٧) أوجد مجال كل من الاقتربات:

$$(1) ق (س) = \sqrt[3]{1 - س} \quad (-1, 1)$$

$$(2) ق (س) = \frac{1}{\sqrt[3]{س - 1}} \quad (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

(١٤٨) أوجد مجموعة الحل للمعادلة $س^2 - ٩س + ٢٤ = ١٨$ = صفر

(١٤٩) أوجد العامل المشترك الأعظم (ع.م.أ) للمقدارين الجبريين:

$$س^2 - ٢س - ٤, س^2 - ٢س - ٤$$

{ ارشاد: استخدم نظرية العوامل والتحليل الى العوامل أيضاً }.

(١٥٠) اكتب قاعدة الاقتران ق (س) الذي يقسم كلاً من الاقترانين:

$$هـ (س) = ٤س^2 + ٣س - ١٠$$

$$ل (س) = ٤س^2 + ٧س - ٣س - ١٥$$

{ ارشاد: ق (س) = المضاعف المشترك الأصغر للاقترانين }

(١٥١) اذا كان ق (س) = ك س^٢ ويمر منحناه بالنقطتين (٢، ١٦)،

$$ب \left(\frac{1}{٢}, ١ \right), أوجد قيمة س.$$

{ ارشاد: أوجد قيمة كل أولاً }

$$(١٥٢) اذا كان ق (س) = \frac{1}{س}, س \neq صفر$$

$$هـ (س) = ٥س^4 + ٨$$

$$\left\{ \frac{1}{١٣}, ٢٣ \right\} \quad (١ -), (٥ ق) (١ -), (٥ ق) (١ -)$$



المتباينات والبرمجة الخطية

**Inequalities and Linear
Programming**

المتباينة Inequality (٩ - ١)

المتباينة جملة مفتوحة تحتوي رمزاً أو أكثر من رموز علاقة الترتيب التالية:

$<$ وثقراً أكبر من

\leq وثقراً أكبر من أو يساوي

$>$ وثقراً أصغر من

\geq وثقراً أصغر من أو يساوي

مثل: $3 < x$ (حيث x عدد حقيقي)

وكذلك: $x + 5 \leq 0$ (حيث x ، y عدنان حقيقيان)

وحل المتباينات معناه إيجاد قيم المتغير أو المتغيرات لتصبح هذه الجمل صواباً في حقل الأعداد الحقيقية حيث مجموعة التعميوض دائماً هي ح "مجموعة الأعداد الحقيقية".

والمتباينات تخضع في حلولها لقانون التثليث (مرُ سابقاً) والذي مفاده لأي عددين حقيقيين x ، y فإنما أن يكون:

$x > y$ أو $x = y$ أو $x < y$

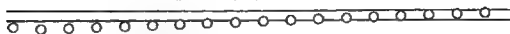
والجدير بالذكر أن لكل متباينة معادلة مرافقة كما يلي:

للمتباينة $x < 3$ معادلة مرافقة هي $x = 3$

للمتباينة $x + 5 \geq 0$ معادلة مرافقة هي $x + 5 = 0$ وهكذا

وقبل البدء بإيجاد مجموعات الحل للمتباينات، نُعيد مناقشة وتوضيح خواص المتباينات كما مرت في حقل الأعداد الحقيقية بإيجاز شديد، فنقول يوتر على أي علاقة ترتيبية (متباينة) بين العددين الحقيقيين x ، y ما يلي من العمليات الرياضية:

المتباينات والتبرمجة الخطية



(i) اذا كان $s \geq v$ فإن $s + a \geq v + a$ ، لكل $a \in \mathbb{R}$

مثال: اذا كان $10 \geq 7$ فإن $10 + 7 \geq 5 + 10$ لأن $12 > 15$ (جمع)

(ii) اذا كان $s \geq v$ فإن $s - a \geq v - a$ ، لكل $a \in \mathbb{R}$

مثال: اذا $10 \geq 7$ فإن $10 - 7 \geq 3 - 10$ لأن $3 \geq 4$ (طرح)

(iii) اذا كان $s \geq v$ فإن $s \cdot c \geq v \cdot c$ ، لكل $c \geq 0$

مثال: اذا كان $10 \geq 7$ فإن $(10) \cdot (2) \geq (7) \cdot (2)$ لأن $20 \geq 14$ (ضرب $c > 0$)

(iv) اذا كان $s \geq v$ فإن $s \cdot c \leq v \cdot c$ ، لكل $c \leq 0$

مثال: اذا كان $10 \geq 7$ فإن $(10) \cdot (-2) \leq (7) \cdot (-2)$ لأن $-20 \leq -14$ (ضرب $c < 0$)

ج > 0

نلاحظ عكس اشارة الترتيب أو التباين

من \geq الى \leq

(v) اذا كان $s \geq v$ وكلاهما $s, v \in \mathbb{R}$ (موجباً معاً)

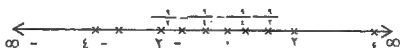
أو $s \leq v$ وكلاهما $s, v \in \mathbb{R}$ (سالبان معاً)

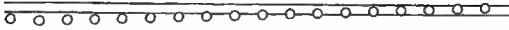
فإن $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{v}$ (مقلوب العددين الحقيقيين الموجبين معاً أو السالبين معاً)

مثال: اذا كان $2 \leq 4$ فإن $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$

وإذا كان $-2 \geq -4$ فإن $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4}$

وهذا صواب وواضح في حقل الأعداد الحقيقية كما هو في الشكل التالي:





(vi) إذا كان $s \geq v$ وكان $v \geq e$ فإن $s \geq e$

لكل s, v, e (علاقة التعدي بالأعداد الحقيقية)

مثال: إذا كان $v > 5$ ، $v > 9$ فإن $9 > 5$ (لا تحتاج الى تفسير)

(vii) إذا كان $s > v$ صفر (يكون للمعديين الحقيقيين s, v نفس الإشارة) والعكس صواب، إذا كان للمعديين الحقيقيين s, v نفس الإشارة يكون $s > v$ صفر.

مثال: إذا كان $(5) < (7)$ صفر فإن المعديين يكونان إما $(5+, 7+)$ أو $(5-, 7-)$

حيث $(5+) (7+) = 35 < \text{صفر}$

وكذلك $(5-) (7-) = 35 < \text{صفر}$

وإذا كان $s > v$ صفر يكون للمعديين الحقيقيين s, v اشارتان مختلفتان ، والعكس صواب، إذا كان للمعديين s, v اشارتان مختلفتان يكون $s > v$ صفر.

مثال: $(5-) (7+) = (7-) (5+) = -35 > \text{صفر}$

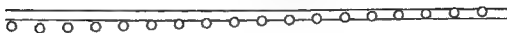
"وهناك خصائص أخرى للمتباينات نناقشها في مواضعها الصواب"

وبما أن حل المتباينات معناه إيجاد القيم العددية للمتغيرات التي تحققها، وغالباً ما تكون هذه الحلول على شكل فترات عديدة بأنواعها:

"مفتوحة، مغلقة، نصف مفتوحة، نصف مغلقة"

وبما أن طرق حل المتباينات مماثلة لطرق حل المعادلات في حقل الأعداد الحقيقية مع فارق وحيد هو "عند ضرب أطراف المتباينة بعدد حقيقي سالب ننعكس رمز التباين، وهذا مفقود بالنسبة للمعادلات كونها (المعادلات) لا تحوي رموزاً للتباين على الإطلاق.

المتباينات والبرمجة الخطية



ولتبدأ:

(٩- ٢) حل نظام من المتباينات بمتغير واحد ومن درجات عدة:

أولاً: حل المتباينات من الدرجة الأولى:

مثال:

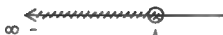
حل المتباينة $12 > 4x$ س

$$4x - 4x$$

$$8 > 0$$

مجموعة الحل = {س: س < ٨}

وكفترة س = $(-\infty, 8)$



وعلى خط الأعداد

مع ملاحظة أن الدائرة الصغيرة حول العدد ٨ وغير المظلة تعني أن العدد ٨ لا ينتمي إلى الحل.

هذا ويمكن أن ترتبط المتباينات مع بعضها البعض بأدوات الربط {أو ، و}

لتكون متباينة مركبة كما في المثالين:

مثال (١):

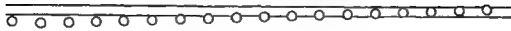
فإذا كان الرابط هو (أو) فإن مجموعة الحل كفترة عددية للمتباينة

المركبة هي $F = F_1 \cup F_2$ ، حيث:

أوجد مجموعة الحل للمتباينة المركبة:-

$$4 < 3 + x \quad (\text{أو}) \quad 5 < x + 3$$

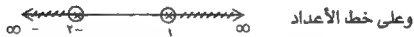




الحل:

$$\begin{array}{rcl}
 2 > 0 & \text{س} & 4 \\
 5 & - & 0 \\
 \hline
 8 > 0 & \text{س} & 4 \\
 2 > 0 & \text{س} & 4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 7 < 2 + 5 & \text{س} & 4 \\
 2 - 2 & - & 2 \\
 \hline
 4 < 2 & \text{س} & 4 \\
 1 < 0 & \text{س} & 4
 \end{array}$$

مجموعة الحل: $\{ \text{س} : 1 < \text{س} \text{ أو } \text{س} > 2 \}$



وكفترات: $\text{س} = (-\infty, 1) \cup (2, \infty) = \text{ح} - [2, 1)$

مثال (٢):

وإذا كان الرابط هو (و) فإن مجموعة الحل كفترة عددية للمتباينة المركبة هي: $\text{ف} = \text{ف} \cap \text{ف}$

حيث ف فترة الحل للمتباينة المركبة

$\text{ف} , \text{ف}$ ف فترات الحل لكل متباينة من المتباين هكذا:

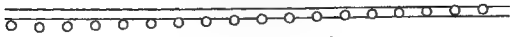
أوجد مجموعة الحل للمتباينة المركبة:-

$$7 > 2 + 5 \quad \text{و} \quad 4 < 3 - 7$$

يمكن كتابة المتباينة المركبة وكأنها واحدة هكذا (إذا كان الرابط و) والطرف الأيمن نفسه كما في المثال:

$$\begin{array}{rcl}
 7 > 2 + 5 & \text{و} & 4 < 3 - 7 \\
 \hline
 2 > 7 & \text{و} & 11 < 3 \\
 \hline
 2 > 7 & \text{و} & 11 < 3 \\
 \hline
 2 > 7 & \text{و} & 11 < 3
 \end{array}$$

المتباينات والمبرمجة الخطية



مجموعة الحل: {س : $-\frac{5}{4} < س < 1$ }

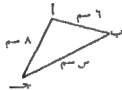
على خط الاعداد

وكفترة: $(-\frac{5}{4}, 1)$

مثال تطبيقي:

إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما ٦ سم، ٨ سم ما طول الضلع الثالث؟

نفرض أن طول الضلع الثالث = س سم



(وحيث أن مجموع طولي ضلعين في مثلث

أكبر من طول الضلع الثالث)) (نظرية)

فإن:

$$٨ + ٦ < س \quad \text{و} \quad ٨ < س + ٦ \quad \text{و} \quad ٦ < س + ٨$$

ولكننا نأخذ المتباينتين الأول والثاني لنشكل متباينة مركبة:

هكذا: $٨ + ٦ < س$ (و) $٨ < س + ٦$ {أما $٦ < س + ٨$ فليست مقبولة هنا كون

$٨ < ٦$ بالأصل ونتج أعداد سالبة بعد

حلها والأطوال ليست سالبة إطلاقاً}

$$١٤ < س \quad \text{(و)} \quad ٨ < س + ٦$$

$$\begin{array}{r} ٦ - \quad ٦ - \\ \hline \end{array}$$

$$٢ < س$$

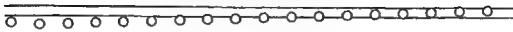
لذلك يمكن أن يقال بأن:

$$١٤ > س > ٢$$

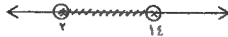
مجموعة الحل: {س : $١٤ > س > ٢$ }



المتباينات والبرمجة الخطية



وعلى خط الاعداد



وكفترة

والتفسير أنه يمكن رسم مثلث شرط أن ينحصر الضلع الثالث فيه بين الطولين ٢ سم ، ١٤ سم فقط وليس أيهما.

مثال:

حل المتباينة - ٣ (٤ - س) = ١٨ فك الأقواس

$$- ٣ + ١٢ س \geq ١٨$$

$$\frac{١٢ + ١٢ س}{٣} \geq \frac{٣٠}{٣}$$

$$١٠ \geq س$$

الحل كمجموعة: {س : س ≤ ١٠}



وعلى خط الاعداد

وكفترة (-∞ ، ١٠]

مثال:

$$\frac{٥(س - ٢)}{٦} - \frac{٧}{١٢} \leq \frac{٣ - س}{٤} - \frac{٢ - س}{١٢}$$

يجب التخلص من الكسور وذلك بضرب طرفي المتباينة بالعدد ١٢ هكذا:

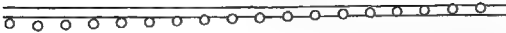
$$١٢ \left(\frac{٥(س - ٢)}{٦} - \frac{٧}{١٢} \leq \frac{٣ - س}{٤} - \frac{٢ - س}{١٢} \right)$$

$$\therefore ٢ - س - ٣ - ٣(٦ - س) \leq ١٠ - ٧(س - ٢)$$

$$٢٠ + س - ٧ \leq ١٨ + ٩ - ٣$$



المتباينات والبرمجة الخطية



وينقل المتغيرات على الطرف الأيمن والاعداد على الطرف الأيسر هكذا:

$$٢ - س - ٩ + س ١٠ \leq ٧ + ٢٠ - ٣ - ١٨$$

١ - (١ - س) مع تغيير إشارة التباين

$$س \geq ٦ \quad \text{مجموعة الحل} = \{س : س \geq ٦\}$$



على خط الاعداد

وكفترة $(٦ - , \infty -)$

ثانياً: حل المتباينات من الدرجة الثانية:

والحل يتم في هذا البند بالاشارات الموجبة والسالبة هكذا:

مثال:

$$\text{حل المتباينة } س^٢ - ٤ س + ٣ > \text{صفر}$$

نجد اشارة الطرف الأيمن بعد تحليله الى عوامله الأولية (اقترانات أولية) هكذا:

$$(س - ٣) (س - ١) > \text{صفر}$$

نجد اشارة س - ٣

$$س - ٣ = \text{صفر} \leftarrow س = ٣ \text{ صفره}$$

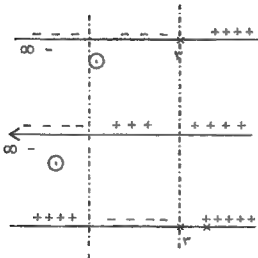
$$ق (٠) = ٣ - ٠ = ٣ \text{ سالب}$$

اشارة س - ١

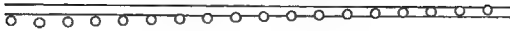
$$س - ١ = \text{صفر} \leftarrow س = ١ \text{ صفره}$$

$$ق (٠) = ١ - ٠ = ١ \text{ سالب}$$

ضرب الاشارات

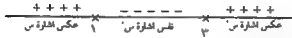


المتباينات والبرمجة الخطية



ويمكن التوصل الى هذه النتيجة كما يلي:

بين الجذرين الاشارة عكس اشارة s^2



وبما أن المطلوب أن قيمة المتباينة $>$ صفر أي سالبة

فإن الحل للمتباينة $s^2 - 2s + 4 < 0$ (قيم سالبة)

الحل كمجموعة { $s: 1 < s < 2$ }

وكفترة (1, 2)



مثال:

أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$s^2 - 2s + 4 < 0 \quad \text{بضرب جميع أطراف المتباينة بالعدد } \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}(s^2 - 2s + 4) < 0 \quad \leftarrow s^2 - 2s + 4 < 0$$

$\therefore s^2 - 2s + 4 < 0$ تحليل الطرف الأيمن الى عوامله الأولية كاهتران تربيعي

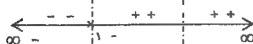
$$(s - 1)(s + 1) < 0$$

والحل يتم بالاشارات أيضاً هكذا



اشارة $s - 1$

وصفره $= 1$



اشارة $s + 1$

وصفره $= -1$

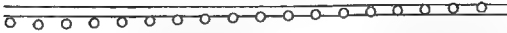


: اشارة $s^2 - 2s + 4$

ضرب الاشارات



المتباينات والبرمجة الخطية



مجموعة الحل للمتباينة $x^2 - 2x < 0$ (القيم موجبة)

الحل كمجموعات {س: س > 1 ، س < 2}

كفترات $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ = حـ [1 ، 2]



مثال:

حل المتباينة $x^2 + 4x - 2 \leq 0$

وحيث أن الطرف الأيمن لا يحل إلا بواسطة اكمال المربع أو القانون هكذا: لأن

مميزه $F = 4 - 2 = 2$ جـ $= (4)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 16 + 8 = 24$ فليس مربع

س $x^2 + 4x - 2 \leq 0$

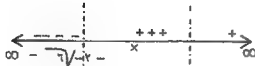
وبإضافة مربع نصف معامل المتغير س الى الطرفين كما يلي:

س $x^2 + 4x - 2 \leq 0$ س $(x^2 + 4x + 4) - 2 \leq 0$

أي أن $(x + 2)^2 - 6 \leq 0$

أي أن $(x + 2)^2 - 6 \leq 0$ ← س $(x + 2)^2 - 6 \leq 0$ س $(x + 2)^2 - 6 \leq 0$

والتحليل $(x + 2)^2 - 6 \leq 0$ س $(x + 2)^2 - 6 \leq 0$ س $(x + 2)^2 - 6 \leq 0$



والحل يتم بالاشارات:

اشارة س $x^2 + 4x - 2$

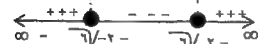
حيث صفر الاقتران $x^2 + 4x - 2$

اشارة س $x^2 + 4x - 2$

وصفـه $x^2 + 4x - 2$

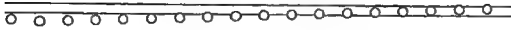
اشارة المتباينة

بضرب الاشارات



حل المتباينة $x^2 + 4x - 2 \leq 0$ (قيم موجبة)

المتباينات والبرمجة الخطية



الحل كمجموعة: $\{(-2, \sqrt{6}) \text{ س } (-2, \sqrt{6})\}$

وكفترة: $[-2, \sqrt{6})$

وعلى خط الأعداد $\infty \leftarrow \frac{1}{\sqrt{6}} - 2 \rightarrow \infty$

ثالثاً من الدرجة الثالثة:

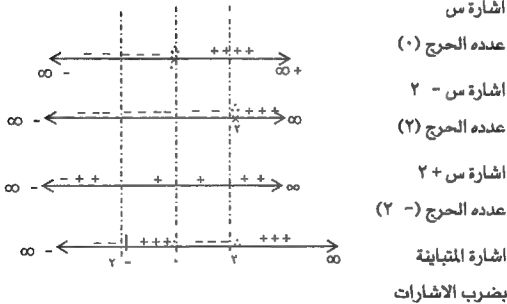
مثال:

حل المتباينة $s^2 - 4 \geq 0$ نحلل الطرف الأيمن إلى عوامله

$$s(s-2)(s+2) \geq 0$$

فأصفار الاقتران أو أعداده الحرجة هي $s = 0, 2, -2$

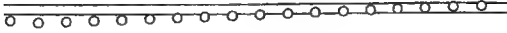
والحل يتم بالإشارات.



مجموعة الحل للمتباينة $s^2 - 4 \geq 0$ قيم سالبة

الحل كمجموعات $s \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

المتباينات والتبرمجة الخطية



كفترات $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

وعلى خط الاعداد $-\infty$ $-\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$ ∞

رابعاً: حل المتباينات الكسرية (والتي تحتوي اقترانات نسبية) مكونة من بسط ومقام وبمتغير واحد فقط:

سنركز الآن على خواص علاقة الترتيب والتي تحتوي الرموز $<$ ، $>$ ، \geq ، \leq والتي بدورها تحول اشارة المتباينة الكسرية كنماذج قسمة البسط على المقام الى اشارة متباينة غير كسرية كحاصل ضرب البسط * المقام هكذا.
(وبإيجاز شديد نحول اشارة القسمة الى اشارات الضرب) هكذا:
فلتحويل اشارات القسمة الى اشارات ضرب نقول:

(i) اذا كان $\frac{ص}{ص} < \text{صفر لكل س}$ ، ص أعداد حقيقية (اشارتا س ، ص متشابهتان في نفس الوقت)

فإن س $< \text{صفر أيضاً}$

مثال:

من المعلوم أن $\frac{0}{6} < \text{صفر لذلك فإن } (5) (6) < \text{صفر أيضاً}$

وكذلك $\frac{0}{6} < \text{صفر لذلك فإن } (5) (-) (6) < \text{صفر أيضاً}.$

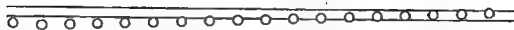
(ii) أما اذا كان $\frac{ص}{ص} > \text{صفر لكل س}$ ، ص أعداد حقيقية (اشارتا س ، ص مختلفتان في نفس الوقت)

مثال:

$\frac{0}{6} > \text{صفر} \leftarrow \text{لذا فإن } (5) (-) (6) > \text{صفر أيضاً}$

وكذلك $\frac{0}{6} > \text{صفر لذا فإن } (5) (-) (6) > \text{صفر أيضاً}.$

المتباينات والبرمجة الخطية



هذه الخاصية سنستخدم عليها في حل المتباينات الكسرية بعد جعل الطرف الأيسر لها (صفر) وتبسيطها أيضاً.

هكذا:

مثال:

$$\text{حل المتباينة } 1 < \frac{2+s}{s-1}, \quad s \neq 1$$

الحل:

لذا يجب استبعاد العدد 1

$$\frac{2+s}{s-1} - 1 < \text{صفر} \leftarrow \frac{2+s - (s-1)}{s-1} < \text{صفر}$$

$$\leftarrow \frac{2+s - s + 1}{s-1} < \text{صفر}$$

$$\text{أي أن } \frac{3}{s-1} < \text{صفر}, \quad s \neq 1$$

وبعد تحويل الاشارات الى الضرب فإن:

$$(2+s)(1-s) < \text{صفر أيضاً}$$

والآن قيم الاشارات هكذا:

اشارة 2 + س

$$2+s = \text{صفر}$$

$$s = -\frac{1}{2} = \text{الصفر}$$

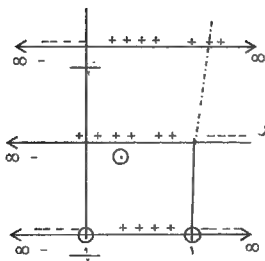
اشارة 1 - س

$$1-s = \text{صفر} \leftarrow s = 1 = \text{الصفر}$$

$$\text{ق (0) } = 1 - \text{صفر} = 1 \text{ موجب}$$

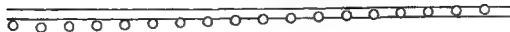
نضرب

الاشارات



وبما أن المتباينة < كما في السؤال

المتباينات والبرمجة الخطية



فإن مجموعة الحل للمتباينة: $\{s: -\frac{1}{2} > s > 1\}$

وعلى خط الاعداد

وكفترة: $(-\frac{1}{2}, 1)$ فالعدد 1 مستبعد أصلاً

ملحوظة:

هناك طريقة أخرى بدل تحويل اشارات القسمة الى ضرب هو ممكناً

بقسمة الاشارات كما في المثال التالي:

مثال:

$$\text{حل المتباينة } \frac{s^2 + s - 12}{s - 1} \leq \text{صفر} , s \neq 1$$

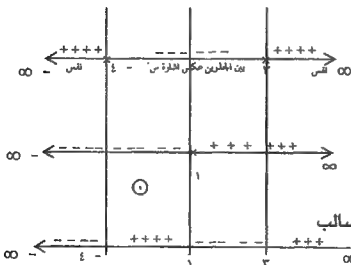
لذا يجب استبعاد العدد 1 من المجموعة الحل.

نحل السؤال مباشرة بقسمة الاشارات دون تحويل القسمة الى ضرب هكذا:

$$\text{اشارة } s^2 + s - 12 = \text{صفر}$$

$$(s + 4)(s - 3)$$

$$s = -4 , 3$$



اشارة $s - 1$

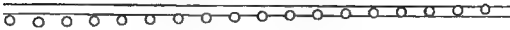
$$s - 1 = \text{صفر}$$

$$s = 1 = \text{صفر}$$

$$ق(0) = 0 - 1 = -1 \text{ سالب}$$

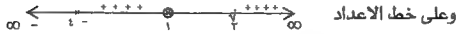
اشارة الكسر

وبما أن اشارة المتباين موجبة كونها $\leq \text{صفر}$



وبما أن $s \neq 1$ فسوف تستبعد العدد 1

فإن مجموعة الحل: $\{s: -4 \leq s < 1, 2 \leq s < \infty\}$



وكفترة $[-4, 1) \cup [2, \infty)$ بعد استبعاد العدد 1

خامساً: حل متباينات تحتوي اقترانات القيمة المطلقة:

تذكر عزيزي الدارس هذه الخاصية (ومن شقين) المفيدة عند حل المتباينات التي تحتوي اقترانات القيم المطلقة وهي:

الشق الأول:

إذا كان $|s| > 1$ ، حيث $1 > 0$

فإن $s > 1$ أو $s < -1$

مثال:

إذا كان $|s| > 5$

فإن $s > 5$ أو $s < -5$

الشق الثاني:

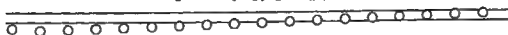
وإذا كان $|s| < 1$ ، حيث $1 > 0$

فإن $s > -1$ أو $s < 1$

مثال:

إذا كان $|s| < 5$

فإن $s > -5$ أو $s < 5$



مثال:

$$\text{حل المتباينة } |س + ٢| > ٣$$

بعد فك القيمة المطلقة واعتماداً على الخاصية بشقها الأول:

$$٣ > س + ٢ \quad -$$

$$٢ - \quad ٢ - \quad ٢ -$$

$$١ > س \quad -$$

مجموعة الحل: {س: - ٥ > س > ١}

وعلى خط الاعداد

وكفترة (١ ، - ٥)

مثال:

$$\text{حل المتباينة } |س + ٢| < ٥$$

وبعد فك القيمة المطلقة واعتماداً على الملاحظة بشقها الثاني فإن:

$$٥ > س + ٢ \quad \textcircled{\text{أو}} \quad ٢ > س + ٢$$

$$٢ - \quad ٢ -$$

$$٣ - \quad ٣ -$$

$$٨ > س + ٢$$

$$٢ > س + ٢$$

$$٤ > س$$

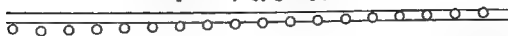
$$١ > س$$

مجموعة الحل: {س: س < ١ ، س > - ٤}

وعلى خط الاعداد

وكفترات (- ∞ ، - ٤) ∪ (١ ، ∞) = ح - [- ٤ ، ١]

المتباينات والبرمجة الخطية



والمشترك:

مجموعة الحل: $\{s: -5 \leq s \leq 2, 2 \leq s \leq 5\}$

وعلى خط الاعداد كما هو اعلام.

وكفترات $[-5, 2] \cup [2, 5]$ فقط

سادساً: حل متباينات تحتوي اقترانات أكبر عدد صحيح:

مثال:

حل المتباينة $2 < [s + 1] < 4$

بما أن قيمة اقتران أكبر عدد صحيح تساوي دائماً عدداً صحيحاً

فإن: $[s + 1] = 3$ حيث 2 تقع بين 2 ، 4 هكذا:

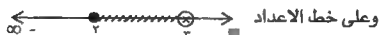
$$4 > 3 > 2$$

وحيث أن لسنا $\frac{\text{تعرف}}{\text{بعد الفك}}$ $n \geq s > n + 1$ لكل $n \in \mathbb{Z}$

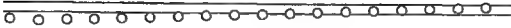
فإن $2 \leq s + 1 < 4$

$$\begin{array}{r} 1 - 1 - 1 - \\ \hline 2 > s \geq 2 \end{array}$$

مجموعة الحل: $\{s: 2 \leq s < 3\}$



وكفترة: $(2, 3]$



مثال:

$$\text{حل المتباينة } 3 > [1 + 3س] \geq 4$$

$$\text{بما أن المتباينة } [1 + 3س] = 4 \text{ \{ تنفي المساواة \} } \geq$$

$$\text{فإن وحسب التعريف العام لدينا } \leftarrow ن \geq س > ن + 1$$

$$\text{فإن } 4 \geq 3س + 1 > 5$$

$$\begin{array}{r} 1 - \quad 1 - \quad 1 - \\ \hline \end{array}$$

$$3 \geq 3س > 4$$

$$\therefore \frac{3}{3} \geq \frac{3س}{3} > \frac{4}{3}$$

$$1 \geq س > \frac{4}{3}$$

$$\text{مجموعة الحل: } \{س: 1 \geq س > \frac{4}{3}\}$$

$$\text{وعلى خط الاعداد } \leftarrow \infty \quad \text{---} \quad 1 \quad \text{---} \quad \frac{4}{3} \quad \text{---} \quad \infty$$

$$\text{وكفترة } \left(\frac{4}{3}, 1 \right]$$

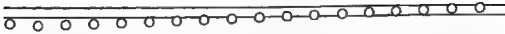
(٩-٣) حل نظام من متباينات خطية بمتغيرين:

لنبدأ بالمتباينة الخطية بمتغيرين:

$$\text{كما أن هناك معادلات خطية بمتغيرين مثل } 2س + 3ص = 6$$

فإنه يوجد مقابلات خطية بمتغيرين مثل $2س + 3ص \leq 6$ على سبيل المثال
ويلاحظ أن الطرف الأيمن لكل من المعادلة والمتباينة متكافئين. لذلك تسمى

$$\text{المعادلة } 2س + 3ص = 6 \text{ المعادلة المناظرة أو المرافقة للمتباينة } 2س + 3ص \leq 6$$



وبشكل عام يوجد لكل متباينة خطية بمتغيرين معادلة مناظرة (مرافقة) بمتغيرين أيضاً بعد استبدال رمز علاقة الترتيب (رمز التباين) بتساوي.

مثال:

لو أن سلمى طلبت من والدتها نقوداً لشراء (٣) دفاتر و(٤) أقلام ولبت والدتها الطلب وأعطتها ١٢٠ قرشاً فقط لشراء ما تحتاجه من الدفاتر والأقلام، ثم أوصتها قائلة لها: اشترى ما تشائين وما توفيره فهو لك لكن لا تطلبي أكثر مهما كان السبب.

لا بُد أن سلمى ستفترض أن ثمن شراء الدفتر = س قرشاً

و ثمن شراء القلم = ص قرشاً

ولكونها لا تود إطلاقاً أن تدفع جميع المبلغ الذي تملكه والبالغ ١٢٠ قرشاً فتكون تكلفة المشتريات هي ٣ س + ٤ ص وحتى لا تزيد (تساوي أو أقل) هذه التكلفة عن المبلغ المخصص لذلك والبالغ ١٢٠ قرشاً، فإن:

٣ س + ٤ ص \geq ١٢٠ وتسمى هذه العلاقة متباينة خطية بمتغيرين، وحل هذه المتباينة سيُنتج عدداً من الأزواج المرتبة كحلول كما يلي:

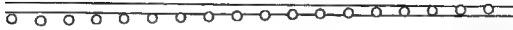
س	٣	٥	٠٠٠	٢
ص	٤	٦	٠٠٠	١٥

$$\text{كون } ٣(٢) + ٤(٤) = ٢٥ \geq ١٢٠$$

$$\text{كون } ٣(٥) + ٤(٦) = ٣٩ \geq ١٢٠$$

⋮
⋮
⋮

$$\text{كون } ٣(٢٠) + ٤(١٥) = ١٢٠ \geq ١٢٠$$



لذلك فالحلول عديدة وتكاد تكون غير منتهية.

ويمكن أن توضح هذه الحلول بنصف مستوى بالتمثل البياني هكذا: وهذا ما يسمى الحل البياني للمتباينة الخطية الواحدة ويتميزين.

مثال:

أوجد منطقة الحل للمتباينة $2س + ص \leq 4$

نرسم أولاً المعادلة المناظرة أو المرافقة وهي $2س + ص = 4$

وهذا بدوره يمثل خط مستقيم (وعندما تحتوي المتباينة أو المساواة مثل \leq أكبر أو يساوي فالخط متصل أو مستمر) يقسم المستوى الديكارتي أو السطح البياني الى قسمين أحدهما منطقة الحل والآخر لا!

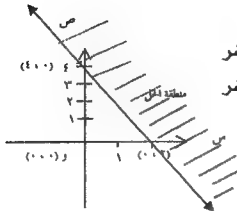
فنصف المستوى الذي يحقق المتباينة $2س + ص \leq 4$ يسمى منطقة الحل

كما يلي:

لرسم المعادلة المرافقة $2س + ص = 4$.

والمعادلة المرافقة تنتج بوضع \leq بدلاً من $=$ كما هو واضح أعلاه.

س	٢	٠
ص	٠	٤



لإيجاد ص نعد ص أي نفرض $ص = 0$

لإيجاد س نعد ص أي نفرض $ص = 0$

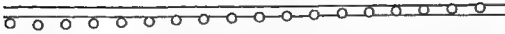
كما في الجدول أعلاه.

بما أن الخط المستقيم الذي يمثل

المعادلة المناظرة أو المرافقة يقسم

المستوى الى نصفين فإن أحدهما

منطقة للحل كما أسلفنا.



ولمعرفة أي من النقطتين هو منطقة الحل نحقق نقطة الأصل و (٠ ، ٠) في المتباينة، فإذا حققت النقطة المتباينة فالنصف الذي يحويها هو منطقة الحل وإذا لم نحققها فالنصف الآخر هو منطقة الحل؛

$$\text{هكذا: } ٢س + ص \leq ٤$$

$$٢(٠) + ٠ \leq ٤$$

$$٠ \leq ٤ \quad \text{الجواب لا}$$

فنصف المستوى الذي لا يحتوي نقطة الأصل هو منطقة الحل. والخط المتصل يقع ضمن منطقة الحل، لذلك نطله كما في الشكل.

ملحوظة هامة:

نؤكد بأن المتباينة إذا استوفت المساواة مثل $س + ص \leq ٥$ فالخط المستقيم الذي يمثل المعادلة المرافقة $س + ص = ٥$ متصل، وإذا لم تحقق المتباينة المساواة مثل $س + ص > ٥$ مثلاً فالخط الذي يمثل المعادلة المرافقة $س + ص = ٥$ متقطع كما يلي:

مثال:

مثل منطقة الحل للمتباينة بيانياً في المستوى الديكارتي:

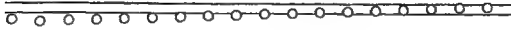
$$س + ٢ص > -٦$$

$$\text{المعادلة المرافقة } س + ٢ص = -٦$$

والخط الذي يمثلها متقطع كون المتباينة $س + ٢ص > -٦$ لا تحتوي المساواة.

نرسم المعادلة المرافقة أو المناظرة هكذا:

س	٠	-٦
ص	٣	٠



لايجاد s نعلم $s \geq 0$ = صفر

لايجاد s نعلم $s \leq 6$ ، $s = 0$ = صفر

نعوض نقطة الأصل في المنحنى

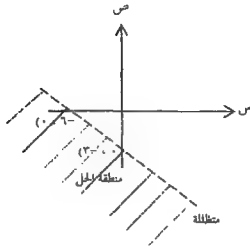
$$s + 2s = 6 \rightarrow 3s = 6$$

$$s = \frac{6}{3} = 2$$

$$s = 2$$

الجواب لا

منطقة الحل لا يشتمل نقطة الأصل



هذا ويمكن أن يختص أحد المتغيرين من المتباينة كون مُعامله يساوي صفر

مثل: $s \geq 0$ ، $s \leq 6$ ، $s > 0$ ، $s < 6$ وهكذا...

سؤال لا بُدُّ منه:

هل المتباينة $s \geq 0$ خطية بمتغيرين أم لا ؟

الجواب: نعم والسبب والتفسير كما يلي:

انها خطية وبمتغيرين هكذا:

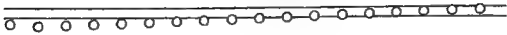
$$s + 0s = 0 \rightarrow s = 0$$

وكذلك المتباينة $s \leq 6$

انها خطية وبمتغيرين هكذا:

$$s + 0s = 6 \rightarrow s = 6$$

وهكذا..



مثال:

مثل بيانياً مجموعة الحل (منطقة الحل) للمتباينة:

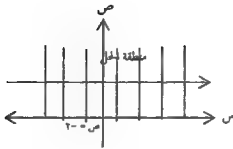
$$ص \leq -2$$

$$ص = -2$$

وبما أنها خطية لأنها $ص + 0 = -2$

والخط متصل

نرسمه هكذا:



ونعوض نقطة الأصل في المتباينة

$$ص \leq -2$$

$$هل \ 0 + 0 \leq -2$$

الجواب: نعم

فمنطقة الحل تحوي نقطة الأصل نظلها هكذا:

ملحوظة:

إذا مرّ الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة المناظر في نقطة الأصل فإن تمثيل المتباينة

يكون كما يلي:

مثال:

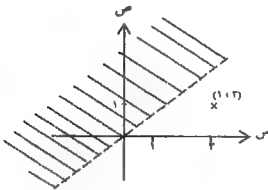
مثل بيانياً منطقة الحل للمتباينة $ص > س$

$$ص = س$$

نعوض نقطة أخرى

ص	1	0
س	0	1

الخط متقطع

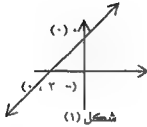


الآن لمعرفة منطقة الحل نعوض نقطة غير نقطة الأصل كون المستقيم يمر بها ولتكن (١ ، ٣) في المتباينة

$$1 > 2 \text{ الجواب: لا}$$

فمنطقة الحل لا تحوي النقطة (١ ، ٣) نطلها بالشكل.

مثال:



شكل (١)

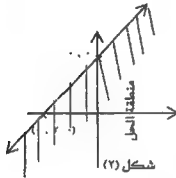
ظل منطقة حل المتباينة الآتية على المستوى الديكارتي
٢ ص - ٥ م $10 \geq$ كما في الشكل الأول.

حيث أنها ممثلة على السطح البياني فلم يبق من الحل
إلا التظليل. وبما أن الخط المستقيم لا يمر بنقطة الأصل

فإننا نعوضها في المتباينة:

$$10 \geq (0) - (0)(2)$$

$$\text{صفر} \geq 10 \text{ نعم}$$



شكل (٢)

فمنطقة الحل هو ضعف المستوى الذي يحتوي نقطة الأصل كما في الشكل (٢)

ملحوظة:

ومن الجدير بالذكر أن العكس صواب، أي من التمثيل البياني لمنطقة
الحل يمكن إيجاد المتباينة الخطية كما في المثال:

مثال:

اكتب المتباينة التي يمثل منطقة الحل كما في الشكل.

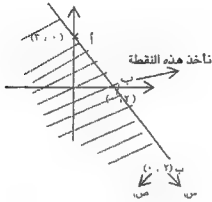
أولاً: نجد معادلة الخط المستقيم الذي يمثل

المعادلة المناظرة هكذا وفق الهندسة التحليلية

المتباينات والبرمجة الخطية

$$\frac{3 - 2}{2} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = \frac{1 - 2}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

معادلة المستقيم:



$$ص - ص_1 = م (س - س_1)$$

$$ص - 0 = 1 (س - 0) \Rightarrow ص = س$$

$$ص = 0 \Rightarrow 3 + س = 0 \Rightarrow س = -3$$

والآن نضع \leq ، \geq حسب تعويض نقطة الأصل حيث تقع في منطقة الحل.

$$\text{هل } ص = \frac{3 - 2}{2} س + 3 \text{ هي المتباينة المطلوبة}$$

$$\text{بالتعويض } (0, 0) \text{ في المتباينة } \frac{3 - 2}{2} س + 3 \leq 0 \Rightarrow 3 \leq 0 \leftarrow \text{الجواب لا}$$

$$\therefore \text{المتباينة المطلوبة هي: } ص \geq \frac{3 - 2}{2} س + 3$$

والآن نأتي الى حل نظام من المتباينات الخطية بمتغيرين:

والنظام في العادة يحتوي متباينين أو أكثر، ولإيجاد منطقة الحل للنظام فإذا

نظل منطقة الحل لكل متباينة في النظام فتكون منطقة الحل هي المنطقة الناتجة

من تقاطع مناطق الحل للمتباينات معاً أو منطقة التظليل المشتركة كما يلي:

مثال:

ارسم منطقة حل النظام $س > 5$

$$ص \leq 1$$

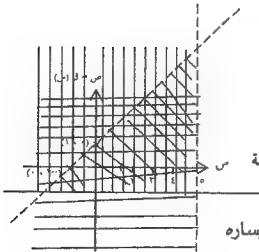
$$ص > س + 1$$

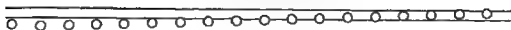
نرسم المعادلة المرافقة لكل متباينة:

$$\text{أولاً: } س > 5 \leftarrow س = 5 \text{ المعادلة المرافقة}$$

والخط مستقطع

والمنطقة كونها أصغر من 5 فهي على يساره





كما في الحل.

ثانياً: $ص \leq -1 \leftarrow ص = -1$ المعادلة المرافقة

والخط متصل

والمنطقة كونها أكبر من -1 فهي أعلاه

كما في الشكل.

ثالثاً: $ص > 1 + ص \leftarrow ص = 1 + ص$ المعادلة المرافقة

ص	0	1 -
ص	1	0

لإيجاد $ص$ نعلم $ص$ ، $ص = 0$

لإيجاد $ص$ نعلم $ص$ ، $ص = 0$

والخط متقطع

فمنطقة الحل بلا رتوش هي ←

مثال:

ارسم منطقة الحل للنظام:

$$ص \leq 0$$

$$ص \leq 0$$

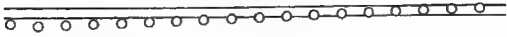
$$ص + ص \leq 2$$

$ص \leq 0$ صفر ← $ص = 0$ صفر المعادلة المرافقة وهي محور الصادات

ومنطقة الحل على اليمين كونها تحوي \leq

$ص \leq 0$ صفر ← $ص = 0$ صفر المعادلة المرافقة

وهي محور السينات

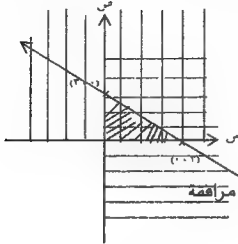


ومنطقة الحل للأعلى كونها تحوي \leq

فالآن حددنا الربع الأول فقط

كون $s \leq$ صفر ، $s \leq$ صفر

فهذه منطقة الربع الأول



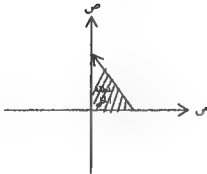
$s + ص \geq 2 \leftarrow s + ص = 3$ معادلة مراقبة

3	0	s
0	3	ص

لإيجاد ص نعلم s ، $ص =$ صفر

لإيجاد s نعلم $ص$ ، $ص = 0$

والخط متصل



والآن نفرز منطقة الحل فلا رتوش

فمنطقة الحل محصورة في الربع الأول فقط.

٩- ٤) البرمجة الخطية Linear Programming:

من المعروف أن أصحاب المنشآت الصناعية والتجارية ومديريها على السواء يهدفون الى تحقيق الأرباح بل أقصاها، وهذا لا يتأتى لهم برفع الأسعار غير المبررة لدى المستهلكين أو بالانتاج الكبير من السلع كما يظن البعض من الآخرين، وانما يتم لهم ذلك بما يسمى الانتاج الأمثل. "الانتاج بتكلفة أقل ما يمكن وبأسعار مقبولة لدى المستهلكين بأذواقهم المتباينة".

ومما يساعد على عدم تحقيق ما يريدون من أرباح في بعض الأحيان وجود قيود وعوائق تتعلق بحجم طاقة المنشأة الانتاجية -إذا كانت المنشأة صناعية على سبيل المثال- مثل حجم المصنع ومساحة مخازنه وعدد ساعات العمل المتاحة للانتاج

والتشغيل والأيدي العاملة الماهرة الرفيعة وعدد الآلات المتواجدة في المصنع والموارد الأولية المتوفرة في الأسواق ورأس المال المستثمر في عملية الانتاج وعملية التسويق للانتاج وغيرها من القيود.

لذا كان لا بد من وجود برنامج خطي تسير عليه المنشأة وسياسة اقتصادية ناجحة تترجم هذا البرنامج على أرض الواقع، واضعوا (السياسة الاقتصادية) أو البرنامج الخطي هم الخبراء والاقتصاديون، من هنا تولدت البرمجة الخطية كأسلوب رياضي يُستخدم لإيجاد أكبر قيمة للربح (تعظيم الربح) أو أقل قيمة للتكلفة (تقليل التكلفة) لاقتران مُطى في ظل مجموعة من القيود والتي تفرضها طبيعة المشكلة للوصول الى الانتاج الأمثل والتي يمكن صياغتها على صورة عدد من المتباينات الخطية وبالاختصار المفيد، نستخدم البرمجة الخطية لتحديد الحجم الأمثل للمشروع الذي يحقق أقصى الأرباح بالالتزام بقيود مفروضة عليه، ولا تنسى أن: تعظيم الربح يتم بتقليل التكلفة الى حدّها الأدنى أو بزيادة الإيراد الى حدّه الأقصى وكلاهما له نفس المعنى.

والبرنامج الخطي يتكون دائماً من ثلاثة أجزاء وهي وعلى الترتيب:

(i) الاقتران الهدف Objective Function:

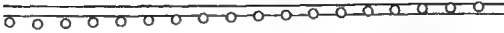
وهو الاقتران الذي يُراد جملة نهاية عظمى فقد.

(ii) مجموعة القيود أو القيود الهيكلية Structural Constraints:

وهي القيود التي تفرضها طبيعة المشكلة والمتعلقة بطاقة المنشأة الانتاجية من حيث عدد ساعات العمل اليومي وحجم رأس المال المستثمر وغيرها...

(iii) متطلبات عدم السالبة Non- Negativity Requirements:

وتفسيرها بكل يسر وسهولة: أن المنشأة لا تنتج إلا عدداً من الوحدات يكون موجباً أو صفر أي أن الانتاج لا يُقل أن يكون سالباً!!!



ولكتابة البرنامج الخطي نبدأ بالمثال:

مثال:

مصنع لانتاج الحقائقب والمعاطف الجلدية، يتوفر لديه ٥٠ م^٢ من الجلد الخام يومياً، فإذا كانت صناعة الحقيبة الواحدة تحتاج الى ١ م^٢ من الجلد الخام، والى ٣ ساعات عمل يومياً وتعطي الحقيبة عند بيعها ربحاً مقداره ديناران، وكانت صناعة المعطف الواحد تتطلب ٢ م^٢ من الجلد الخام والى ٤ ساعات عمل يومياً ويعطي المعطف عند بيعه ربحاً مقداره ٤ دنانير، فإذا علمت أن ساعات العمل المتاحة في المصنع ١٨ ساعة يومياً.

"اكتب برنامجاً خطياً لهذه المسألة"

نفرض أن المصنع يريد انتاج س حقيبة يومياً.

ويريد انتاج ص معطف يومياً

نرتب المعلومات المعطاة هكذا:

حقائب	معاطف	المتوفر من الجلد الخام يومياً
س	ص	
١ س + ٢ ص	≥ 50	(١)

ساعات العمل المتاحة يومياً

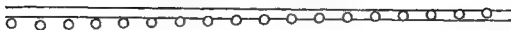
$$٣ س + ٤ ص \geq ١٨ \quad (٢)$$

لانتاج س حقيبة نحتاج س * ١ = ١ س م^٢

ولانتاج ص معطف نحتاج ص * ٢ = ٢ ص م^٢

جمعاً ١ س + ٢ ص ≥ 50 كما هو أعلاه

وكذلك ٣ س + ٤ ص ≥ ١٨ كما هو أعلاه



الاقتران الهدف:

الريح من الحقائق $2 = \text{ص} \times 2$ $2 = \text{ص}$ دينار

والريح من المعاطف $4 = \text{ص} \times 4$ $4 = \text{ص}$ دينار

فالاقتران الهدف $2 = \text{ص} + 4$ دينار

والآن نترجم المعلومات السابقة الى برنامج خطي كما يلي:

المقصود:

١ $2 + \text{ص} \geq 50$ كون المصنع يستخدم ٥٠ م^٢ أو اقل واما أكثر فلا

٣ $4 + \text{ص} \geq 18$ كون العمال يستطيعون العمل ١٨ ساعة فأقل

الاقتران الهدف:

$2 = \text{ص} + 4$ دينار حيث ص ر

قيود عدم السالبة:

$\text{ص} \geq 0$ انتاج الحقائق ليس سالباً اطلاقاً بل موجب أو صفر

وكذلك $\text{ص} \geq 0$ انتاج المعاطف ليس سالباً اطلاقاً بل موجب أو صفر

ملحوظة جديدة بالانتباه:

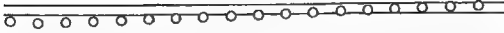
السلع من حيث الانتاج نوعان هما:

الأول: سلع لا يمكن انتاجها إلا كأعداد صحيحة موجبة مثل الأجهزة الكهربائية

والثلاثيات والحقائب المدرسية، حيث لا معنى لنصف ثلاثة أو لربع حقيبة

لذا فإن المتغيرات الدالة عليها (س ، ص) تكون أعداد منفصلة أي أعداد

صحيحة مستقلة عن بعضها.



الثاني: سلع يمكن انتاجها بأعداد حقيقية موجبة أي يمكن أن تكون على شكل أعداد كسرية كعدد أكياس أو الحبوب بأنواعها إذ يوجد هناك نصف كيس سكر وربع كيس أرز وثلاث طن قمح وهكذا...

لذا فإن المتغيرات الدالة على عدد انتاجها تكون متصلة أي صحيحة وكسرية أيضاً.

(٩- ٥) الطريقة الهندسية لحل البرنامج الخطي بمتغيرين Graphical Method:

ترتبط هذه الطريقة بالتمثيل البياني للمتباينات الخطية كما يلي:

مثال:

ينتج مصنع يومياً صنفين من الثلاجات هما الكبير الحجم والصغير الحجم ويستخدم لهذا الغرض معملين.

فإذا كان انتاج ثلاجة كبيرة يحتاج الى ٦ ساعات عمل في المعمل الأول

و ٣ ساعات عمل في المعمل الثاني

وانتاج ثلاجة صغيرة يحتاج الى ساعتين عمل في المعمل الأول

و ٥ ساعات عمل في المعمل الثاني

وإذا كانت الطاقة الانتاجية للمعملين لا تزيد عن ١٢ ساعة، ١٥ ساعة يومياً وعلى الترتيب. أوجد عدد الثلاجات الواجب انتاجها يومياً لتحقيق أكبر ربح ممكن علماً بأن ربح المصنع في الثلاجة الكبيرة ٧٥ ديناراً وفي الثلاجة الصغيرة ٥٠ ديناراً.

الحل:

نفرض أنه ينتج س ثلاجة كبيرة ، ص ثلاجة صغيرة

نرتب المعلومات المعطاة:

الطاقة الانتاجية بالساعات	(ص)	(س)
الحجم الصغير	الحجم الكبير	
المعمل الأول ٦ س + ٢ ص ≥ 12		
المعمل الثاني ٣ س + ٥ ص ≥ 10		
الاقتران الهدف:	$ر = ٧٥ س + ٥٠ ص$	

عدد السالبيه: $س \leq ٠$ صفر حيث الانتاج ليس سالباً على الاطلاق.

$ص \leq ٠$ صفر حيث الانتاج ليس سالباً على الاطلاق.

الآن نمثل المتباينات على المستوى الديكارتي معاً وعلى سطح واحد.

علمنا بأن عدم السالبيه ($س \leq ٠$ صفر ، $ص \leq ٠$ صفر) يحصر منطقة الحل في الربع الأول حيث لا انتاج سالب على الاطلاق

أولاً: نمثل المتباينة الأولى:

$$٦ س + ٢ ص \geq ١٢$$

المعادلة المرافقة:

$$\frac{٦ س + ٢ ص = ١٢}{٢}$$

$$٣ س + ص = ٦$$

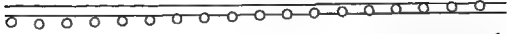
٣	٠	س
٠	٦	ص

وحيث أن نقطة الأصل تحقق المتباينة:

$$١٢ \geq ٠ + ٠$$

فمنطقة الحل للمتباينة باتجاه نقطة الأصل -

المتباينات والبرمجة الخطية



ثانياً: نمثل المتباينة الثانية:

$$3س + 5ص \geq 15$$

المعادلة المرافقة $3س + 5ص = 15$

٥	٠	س
٠	٣	ص

وحيث أن نقطة الأصل تحقق المتباينة

$$15 \geq 3(0) + 5(0)$$

فمنطقة الحل للمتباينة باتجاه نقطة الأصل

فمنطقة الحل للنظام من المتباينات هو الشكل الرباعي أ ب و ج كما في الشكل.

ولأن الثلاجات من السلع التي لا تنتج إلا بأعداد صحيحة سواء أكانت صغيرة أو كبيرة فإننا نبحث عن الأزواج المرتبة ذوات المساقط الصحيحة داخل منطقة الحل لتعظيم الربح.

سنجد أولاً إحداثيات نقطة التقاطع أ لنرى هل تنضم إلى الأزواج المرتبة عند تعظيم الربح أم لا ؟

وذلك بحل المعادلتين المرافقتين للمتباينين بالحذف هكذا:

$$(1) \quad 6 = 3س + 5ص$$

$$(2) \quad 15 = 3س + 5ص$$

$$9 = 5ص - 4ص$$

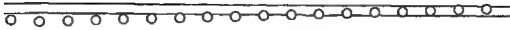
$\frac{9}{5} = ص$ ليس عدداً صحيحاً إذن لا يصلح أن يكون عدداً يمثل إنتاج الثلاجات

$$وذلك 6 = 3س + 5ص$$

$$\therefore 6 = \frac{9}{5} + 3س$$



المتباينات والبرمجة الخطية



$$\frac{10}{4} = \frac{9 - 24}{4} = \frac{9}{4} - \frac{6}{1} = 3 \text{ س}$$

$$\therefore \frac{10}{4} = \frac{3}{1} \text{ س} \text{ وبالصرب التبادلي}$$

$$12 \text{ س} = 10$$

س = $\frac{10}{4}$ ليس عدداً صحيحاً فلا يصلح أن يكون عدداً يمثل انتاج الثلاثات

$$\therefore \text{النقطة أ} \left(\frac{9}{4}, \frac{10}{4} \right)$$

لا تدخل في نقط تعظيم الربح كما في الجدول التالي:

والآن نقوم بتظيم الربح بإيجاد قيمة اقتران الهدف الذي يمثل أقصى ربح
ونناقش كل نقطة مساقطها أعداد صحيحة (الثلاثات تنتج بأعداد صحيحة فقط)
هكذا:

و	د	ب	م	هـ	ن	ل	ج	عدد الثلاثات الصغيرة
٠	١	٢	٠	١	٠	١	٠	س
٠	٠	٠	١	١	٢	٢	٣	عدد الثلاثات الصغيرة
٠	٧٥	١٥٠	٥٠	١٢٥	١٠٠	١٧٥	١٥٠	ص

ونعوض كل زوج مرتب أعلاه في اقتران الهدف لتحقيق أكبر قيمة للربح هكذا:

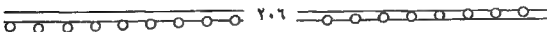
$$\text{بما أن } ر = ٧٥ \text{ س} + ٥٠ \text{ ص}$$

$$\text{فإن } رو = ٧٥(٠) + ٥٠(٠) = \text{صفر} \text{ لا ربح كونه لا انتاج / مفروض أصلاً}$$

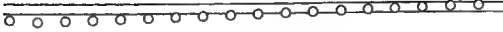
$$\text{رد} = ٧٥(١) + ٥٠(٠) = ٧٥ \text{ ديناراً}$$

$$\text{رب} = ٧٥(٢) + ٥٠(٠) = ١٥٠ \text{ ديناراً}$$

$$\text{رم} = ٧٥(٠) + ٥٠(١) = ٥٠ \text{ ديناراً}$$



المتباينات والبرمجة الخطية



$$ر هـ = ٧٥ (١) + ٥٠ (١) = ١٢٥ \text{ دينار}$$

$$ر ن = ٧٥ (٠) + ٥٠ (٢) = ١٠٠ \text{ دينار}$$

$$ر ل = ٧٥ (١) + ٥٠ (٢) = ١٧٥ \text{ دينار}$$

$$ر و = ٧٥ (٠) + ٥٠ (٣) = ١٥٠ \text{ دينار}$$

ومن الجدول تبين أن الريح اليومي يكون أكبر ما يمكن ومقداره ١٧٥ دينار عندما ينتج المصنع ثلاثة من الحجم الكبير وثلاثتين من الحجم الصغير.

أحياناً وعندما يكون المتغيران س ، ص منفصلين والنقط في منطقة الحل عديدة نكتفي عند تعظيم الريح بالنقط الركنية (الموجودة في الزوايا والأركان) كون الانتاج الأمثل (الذي يحقق أقصى الأرباح) يتمثل بالنقط البعيدة عن نقطة الأصل وهذا ما يوضحه المثال التالي:

مثال:

ينتج مشغل نوعين من القمصان يومياً، الأول رجالي ويربح بالقميص عند بيعه ٣ دنانير والثاني ولادي ويربح بالقميص عند بيعه ٢ دينار، فإذا كان هذا المشغل قادراً على انتاج ما لا يزيد عن ٢٠ قميصاً من النوعين يومياً، فكم قميص من كل نوع يجب أن ينتج يومياً ليتحقق أكبر ربح ممكن، شرط أن لا ينتج أقل من ٤ قمصان من النوع الأول يومياً؟

استخدم الطريقة الهندسية:

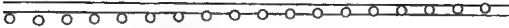
الحل:

نفرض أنه ينتج من القمصان الرجالي يومياً س قميص
ومن القمصان الولادي يومياً ص قميص

نرتب المعلومات المعطاة: قمصان رجالي قمصان ولادي الطاقة الانتاجية
(س) (ص)



المتباينات والبرمجة الخطية



العدد $س + ص \geq 20$ كونه لا ينتج أكبر من 20

$س \leq 4$ كونه لا ينتج أقل من 4 رجالي

عدم السالبية $ص \leq$ صفر ممكن أن لا ينتج أي قميص من هذا النوع (الولادي)

الاقتران الهدف: $ر = 3س + 2ص$ أكبر ما يمكن

نقوم الآن بتمثيل المتباينات $س + ص \geq 20$ (١)

$س \leq 4$ (٢)

$ص \leq$ صفر (٣)

على المستوى الديكارتي نفسه

أولاً: نمثل $س + ص \geq 20$

المعادلة المرافقة

$$س + ص = 20$$

والخط متصل أي ينتمي إلى منطقة الحل

20	0	س
0	20	ص

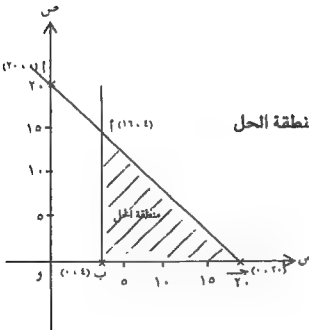
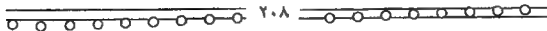
$س \leq 4$ والخط متصل

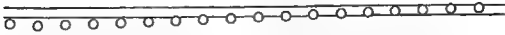
تمثل $س = 4$ وعلى يمينه كما في الشكل.

عدم السالبية.

أي $س \leq$ صفر $ص \leq$ صفر كون $س \leq 4$

$ص \leq$ صفر يحصران منطقة الحل في الربع الأول





وبما أن عدد القمصان المنتجة يجب أن يكون أعداد صحيحة فقط، إذ لا يعقل إنتاج نصف قميص ثم تسويقه كونه معيب ويعود إلى المشغل حال رؤيته بهذا الشكل.

لذا فإننا نعظم الربح بأزواج مرتبة مساقطها أعداد صحيحة وللتقط الركنية فقط:

نجد احداثيات النقطة أ : عندما $s = 4$ فإن $s + ص = 20$

ومنها $4 + ص = 10 \rightarrow ص = 16$

∴ احداثيات أ (4 ، 16)

وكون الحلول (الأزواج المرتبة عديدة، فإن الانتاج الأمثل يتمثل بالأطراف، لذا فإننا نستبعد نقطة الأصل منها حيث لا انتاج ولا أرباح تمثلها نقطة الأصل، كما في الجدول التالي:

	أ	ب	ج	د
س	4	4	2	4
ص	16	0	0	16
الربح	44	12	60	44

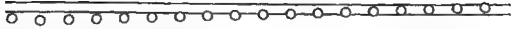
بما أن $ر = 3س + 2ص$

فإن $ر = 3(4) + 2(0) = 12$ دينار

جـ $ر = 3(20) + 2(0) = 60$ دينار

د $ر = 3(4) + 2(16) = 44$ دينار

ومن الجدول يتبين أن الربح اليومي يكون أكبر ما يمكن عندما ينتج المشغل 20 قميص رجالي، ولا ينتج أي قميص ولادي إلا إذا تغيرت الظروف الاقتصادية والأحوال المعيشية للزبائن الكرام.



Algebraic (٩ - ٦) الطريقة الجبرية لحل البرنامج الخطي بمتغيرين

:method

ترتبط هذه الطريقة بعمليات الصف البسيط Simple Row Operations وهذه العمليات قادرة على تحويل أنظمة المعادلات الخطية الى أنظمة أخرى مكافئة لها بقصد المساعدة في حل البرنامج الخطي المطلوب.

ولتوضيح هذه الطريقة نناقش هذا المثال بخطوات مرتبة ومنسقة هكذا:

مثال:

تريد شركة أن تنتج نوعين من السلع، ويحتاج انتاج الوحدة من النوع الأول الى ساعتي عمل في قسم التشغيل الآلي، وساعتي عمل في قسم التفليف اليدوي، في حين تحتاج الوحدة من النوع الثاني الى ٢ ساعات عمل في قسم التشغيل الآلي، وساعة عمل واحدة في قسم التفليف اليدوي.

فإذا فُرض أن ربح الشركة سيكون ٦ دنانير للوحدة من النوع الأول

و ٨ دنانير للوحدة من النوع الثاني

ولأسباب فنية لا يمكن العمل بقسمي التشغيل الآلي والتفليف اليدوي أكثر من ١٢ ساعة ، ٨ ساعات يومياً على الترتيب.

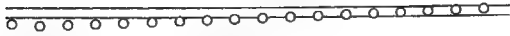
كم وحدة من كل نوع يجب أن تنتجها الشركة يومياً حتى نجعل ربحها الكلي أكبر ما يمكن؟ باستخدام الطريقة الجبرية.

نتم خطوات الحل هكذا:

نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول x وحدة.

وعدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني y وحدة

وبذا يكون الاقتران الهدف $R = 6x + 8y$ ص دیناراً.



نرتب المعلومات المعطاة النوع الأول النوع الثاني عدد الساعات المتاحة
س ص

$$\text{قسم التشغيل الآلي} \quad 2 \text{ س} + 3 \text{ ص} \geq 12$$

$$\text{قسم التغليف اليدوي} \quad 2 \text{ س} + 1 \text{ ص} \geq 8$$

مع الانتباه لعدم السالبة حيث المصنع لا ينتج إطلاقاً كميات سالبة بل انتاجه موجب أو صفر (في حالة توقفه عن الانتاج)

$$\text{أي أن س} \leq \text{صفر} , \quad \text{ص} \leq \text{صفر}$$

نبدأ باستخدام متغيرات وهمية جديدة لتحويل المتباينات والاقتران الهدف الى نظام من المعادلات الخطية باستثناء المتباينات المتعلقة بعدم السالبة (س \leq صفر ، ص \leq صفر) هكذا:

$$(1) \quad 2 \text{ س} + 3 \text{ ص} + \text{ل} + \text{ك} + \text{ح} = 12 \quad \leftarrow$$

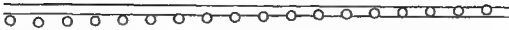
$$(2) \quad 2 \text{ س} + 1 \text{ ص} + \text{ل} + \text{ك} + \text{ح} = 8 \quad \leftarrow$$

$$(3) \quad -6 \text{ س} - 8 \text{ ص} + \text{ل} + \text{ك} + \text{ح} = \text{صفر} \quad \leftarrow$$

وكما تلاحظ أن معاملات المتغيرات الوهمية الجديدة، يُعدم منها متغيران (معاملاتها أصفار) في كل صف.

ثم نقوم بترتيب المعاملات والثوابت كما هو مبين بالجدول التالي:

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت
2	3	1	0	0	12
2	1	0	1	0	8
-6	-8	0	0	1	0



الآن نبحث عن الركييزة الأولى، والتي تكون في العامود الذي في صفه الأخير أقل عدد سالب، وهنا الركييزة في العامود ص الثاني (عامود معاملات ص)، أي أن الركييزة هي ٣ أو ١ وحتى نختار الركييزة بطريقة سليمة فإننا نقسم معاملات عامود الثوابت على معاملات عامود ص وخارج القسمة الأقل يدل على الركييزة هكذا:

$$٤ = ٣ \div ١٢$$

$$٨ = ١ \div ٨$$

وبما أن ٤ أقل من ٨ فالمقسوم عليه (٣) هو الركييزة في الصف الأول والركييزة الأخرى في الصف الثاني وليست بنفس صف الأولى، أي أن الركائز في صفين وليس في صف واحد وهما هنا (٣)، (٢) كما في الشكل الأول

\downarrow \downarrow
 في الصف الأول في الصف الثاني

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	
٢	(٣)	١	٠	٠	١٢	الركييزة حولها دائرة
(٢)	١	٠	١	٠	٨	الركييزة حولها دائرة
- ٦	- ٨	٠	٠	١	٠	

وبذا نكون قد حددنا كلا من الركييزتين بعامودها وصفها كما هو أعلاه.

نقوم الآن بالدوران حول الركائز (تعبيرات لغوية فقط) وذلك بأن نجعل قيمة كل ركييزة تساوي العدد الصحيح "١" وجميع الأعداد في عامودي معاملات س، ص أصفراً استعانة بعمليات الصف البسيط، والتي وردت في فصل المصفوفات والمحددات، وهذه العمليات متصلة مع بعضها البعض بكل بساطة وسهولة كما يلي:



المتباينات والبرمجة الخطية

	الثوابت	ح	ك	ل	ص	س	
نضرب الصف ٢ في $\frac{1}{3}$	١٢	٠	٠	١	(٣)	٢	$(-\frac{1}{3})$
	٨	٠	١	٠	١	(٢)	
	٠	١	٠	٠	٨ -	٦ -	

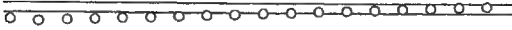
	الثوابت	ح	ك	ل	ص	س	
نضرب الصف الأول في ٨	٤	٠	٠	$-\frac{1}{3}$	(١)	$-\frac{1}{3}$	وإذا
الصف الثاني - الصف الأول	٨	٠	١	٠	١	(٢)	
	٠	١	٠	٠	٨ -	٦ -	

جما	الثوابت	ح	ك	ل	ص	س	
	٤	٠	٠	$-\frac{1}{3}$	(١)	$-\frac{1}{3}$	
نضربه في $\frac{3}{1}$	٤	٠	١	$-\frac{1}{3} -$	٠	$(-\frac{1}{3})$	$(-\frac{2}{3})$
	٣٢	١	٠	$-\frac{4}{3}$	٠	$-\frac{1}{3} -$	

كما يلاحظ أن عامود الركيزة الأولى (ص) أصبح جاهزاً وعلى الصورة المطلوبة، ومثله سوف نجعل عامود الركيزة الثانية س هكذا:

الاجراءات	الثوابت	ح	ك	ل	ص	س	
نضربه في $\frac{1}{3}$	٤	٠	٠	$-\frac{1}{3}$	(١)	$-\frac{1}{3}$	
	٣	٠	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3} -$	٠	(١)	
	٣٢	١	٠	$-\frac{4}{3}$	٠	$-\frac{1}{3} -$	

	الثوابت	ح	ك	ل	ص	س	
	٢	٠	$-\frac{1}{3} -$	$-\frac{1}{3}$	(١)	٠	
	٣	٠	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3} -$	٠	(١)	
	٣٤	١	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	٠	٠	



والآن حصلنا على المصفوفة التي نريد وهي:

$$\begin{array}{c} \text{مصفوفة الثوابت} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{وتكائني} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\therefore \text{ص} = 2$$

$$\text{س} = 3$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل } \text{س} = 3, \text{ ص} = 2$$

أي أن الشركة يجب أن تنتج 3 وحدات من النوع الأول

و 2 وحدة من النوع الثاني

حتى تحقق ربحاً مقداره 34 ديناراً.

للتحقق:

نأخذ الاقتران الهدف:

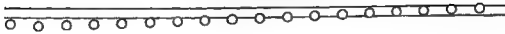
$$ر = 6\text{س} + 8\text{ص}$$

$$\text{والآن } 34 = 6(3) + 8(2)$$

$$34 = 18 + 16$$

الجواب نعم بالتأكيد فالحل صواب ولكن طريقة الحل مطولة كثيراً ومملة

أكثر.



(٩ - ٧) أمثلة محلولة على المتباينات والبرمجة الخطية

مثال (١):

أي من الجمل التالية صواب وأيها خطأ؟

(i) $1 \geq 7$ ← خطأ

(ii) $2 \geq 2$ ← صواب

(iii) $\sqrt{7} \geq 5\sqrt{7}$ ← صواب

(iv) $4 > 16\sqrt{7} > 3$ ← خطأ

(v) $|-5| \geq |4|$ ← صواب

مثال (٢):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة ومثلها على خط الاعداد

$$3س - 2 \geq 2س + 5$$

$$3س - 2 \geq 2س + 5$$

$$3س - 2س \geq 2 + 5$$

$$س \geq 7$$

$$2س + 2س$$

$$7 \geq س$$

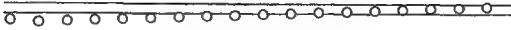
مجموعة الحل: {س: $س \geq 7$ }

وعلى خط الاعداد



وكفترة س = (-∞ ، ٧]





مثال (٣):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة المركبة:

$$٢(١٢ - س) > ٣١ \quad (١) \quad ٢ - ١ > ٣١$$

$$٢٤ - ٢س > ٣١ \quad ٢ - ١ > ٣١$$

$$\begin{array}{r} ١ - ١ - \\ \hline ٢ - س > \frac{٢٠}{٢ -} \end{array}$$

$$١٠ > س$$

$$\begin{array}{r} ٢ + س + ٢ \\ \hline ٤ > ٣٦ \end{array}$$

$$٩ > س$$

مجموعة الحل: {س: ٩ > س > ١٠}



وكفترة (٩ ، ١٠) = س

مثال (٤):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

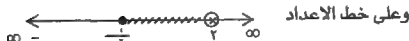
$$٢ - ١ > ٢ + س \geq ٢$$

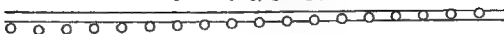
$$\begin{array}{r} ٢ - ٢ - ٢ - \\ \hline ١ - \geq ٢ - س \geq ٤ - \end{array}$$

$$\text{بعد تبديل رموز التباين} \quad ٢ > س \geq \frac{١}{٢}$$

مجموعة الحل: {س: ٢ > س ≥ 1/2}

كفترة [1/2 ، ٢)



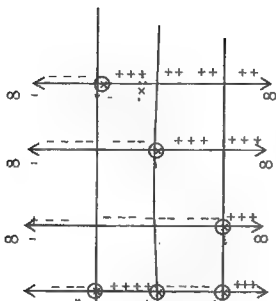


مثال (٥):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$(س + ٣) (س - ١) (س - ٤) > \text{صفر}$$

نبدأ بضرب الاشارات رأساً:



اشارة س + ٣

$$س + ٣ = \text{صفر}$$

$$٣ - = ٥ \text{ صفر الاقتران}$$

اشارة س - ١

$$س - ١ = \text{صفر}$$

$$١ = \text{صفر الاقتران}$$

اشارة س - ٤

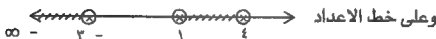
$$س - ٤ = \text{صفر}$$

$$٤ = \text{صفر الاقتران}$$

اشارة الطرف الأيمن من المتباينة

$$\{س > ٤, ١ < س < ٣\}$$

$$\text{كفترات } (-\infty, -١) \cup (١, ٤)$$



مثال (٦):

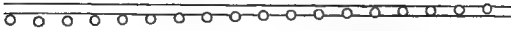
أوجد مجموعة الحل للمتباينة $٣ > \frac{١}{س}$

نجعل الطرف الأيسر صفر

$$\frac{٣}{س} - \frac{١}{س} > \text{صفر}$$

ونجعل الطرف الأيمن اقتراناً نسبياً واحداً.

$$\frac{٣ - ١}{س} > \text{صفر}$$

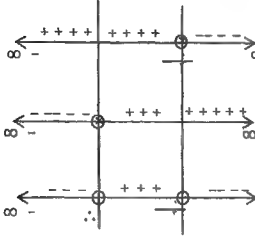


والحل مباشرة بقسمة الاشارات دون تحويلها الى ضرب:

اشارة ١ - ٣ س

١ - ٣ س = صفر

س = $\frac{1}{3}$ صفر الاقتران



اشارة س

س = صفر صفر الاقتران

مجموعة الحل = { س : س > صفر ، س < $\frac{1}{3}$ }

كفترات (- ، ∞) : \cup ($-\frac{1}{3}$ ، ∞) ح - (٠ ، $-\frac{1}{3}$]

وعلى خط الاعداد

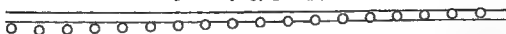
مثال (٧):

يملك سعدون ١٠٠٠ دونماً من الأراضي لزراعة الفواكه والخضار، يدر عليه دونم الفواكه ٤٠٠ دينار في الموسم، ودونم الخضار ٥٠٠ دينار، ولكن وزارة الزراعة لا تسمح بزراعة أكثر من ٤٠٠ دونماً خضار، وان الطاقة الانتاجية المتاحة في الموسم لا تزيد عن ٤٤٠٠ ساعة عمل، فإذا علمت أن الدونم المزروع فواكه يحتاج الى ٤ ساعات عمل في الموسم، وان الدونم المزروع خضار يحتاج الى ٥ ساعات عمل في الموسم. كم دونماً يزرع سعدون فواكه وكم دونم يزرعها خضار؟
"باستخدام الحل الهندسي"

الحل:

نفرض أنه يزرع س دونم فواكه ، ص دونم خضار

المتباينات والبرمجة الخطية



المتباينات فواكه (س) خضار (ص)

(١) $1000 \geq \text{ص} + \text{س}$ الأرض

(٢) $4400 \geq 5\text{ص} + 4\text{س}$ ساعات العمل

(٣) $400 \geq \text{ص}$ قيد وزارة الزراعة

الاقتران الهدف: $\text{ر} = 400\text{ص} + 500\text{س}$

عدد السالبة: $\text{س} \geq \text{صفر}$
 $\text{ص} \geq \text{صفر}$ يحصران منطقة الحل في الربع الأول

الحل الهندسي:

نبدأ برسم المتباينات هكذا:

(١) $1000 \geq \text{ص} + \text{س}$ ← المعادلة المرافقة $\text{ص} + \text{س} = 1000$

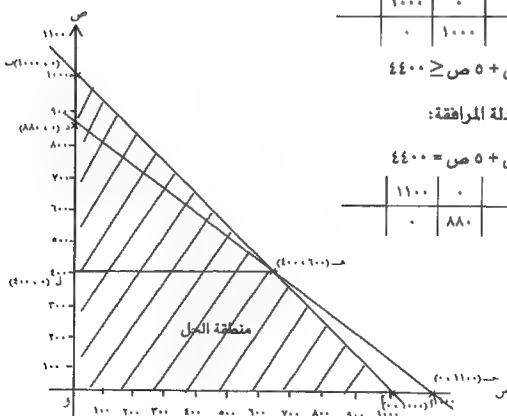
س	٠	١٠٠٠
ص	١٠٠٠	٠

$4400 \geq 5\text{ص} + 4\text{س}$

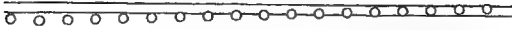
المعادلة المرافقة:

$4400 = 5\text{ص} + 4\text{س}$

س	٠	١١٠٠
ص	٨٨٠	٠



المتباينات والبرمجة الخطية



نجد أحداثيات التقاطع للنقطة ه لحذف ص

$$(1) \quad 5 \text{ ص} + 1000 = 1000$$

$$(2) \quad 4 \text{ ص} + 5 \text{ ص} = 4400$$

$$(2) \quad 4 \text{ ص} + 5 \text{ ص} = 4400$$

$$(1) \quad 5000 - 5 \text{ ص} = 5000$$

$$600 - 5 \text{ ص} = 5000$$

$$600 = 5 \text{ ص}$$

$$1000 = 5 \text{ ص} + 1000$$

$$1000 = 600 + 5 \text{ ص}$$

$$5 \text{ ص} = 1000 - 600 = 400$$

$$5 \text{ ص} = 400$$

$$5 \text{ ص} = 400$$

ومنطقة الحل باقي نقطة الأصل.

وهو المضلع أ ه ل و: كما في الشكل.

والآن نعظم الربح كما في الجدول:

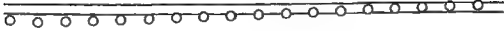
	ل	هـ	أ	ص
مساحة الموائجة	صفر	600	1000	ص
مساحة التشجير	400	400	صفر	ص
الربح	200000	440000	400000	

$$ر = 500 \text{ ص} + 400 = 500 \text{ ص}$$

$$فإن ر أ = 400 = (1000) + (500 \text{ صفر}) = 400000$$



المتباينات والبرمجة الخطية



$$٢٠٠٠٠٠ + ٤٤٠٠٠٠ = (٤٠٠) ٥٠٠ + (٦٠٠) ٤٠٠ = \text{ر هـ}$$

$$٤٤٠٠٠٠ =$$

$$\text{ر ل} = ٤٠٠ (\text{صفر}) + (٤٠٠) ٥٠٠ = ٢٠٠٠٠٠$$

∴ س = ٦٠٠ دونم يجب أن يزرعها فواكه

ص = ٤٠٠ دونم يجب أن يزرعها خضار

ليحصل على أرباح قيمتها ٤٤٠٠٠٠ دينار وهي القصوى.

=

مثال (٨):

مثل المتباينة الخطية $٣ \leq ٤$ ص بيانياً

أولاً: نجد المعادلة المرافقة وهي $٣ = ٤$ ص

والخط المستقيم متصل.

وبعد ذلك نقوم ببناء الجدول التالي:

٤	١	س
٣	٠	ص

$$٣ (٤) = ٤ \text{ ص} \leftarrow ٤ \text{ ص} = ١٢$$

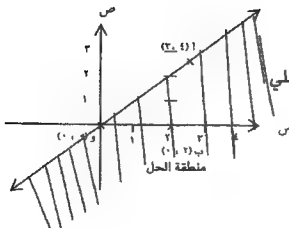
$$\text{ص} = ٣$$

وبما أن الخط المستقيم يمر بنقطة الأصلي

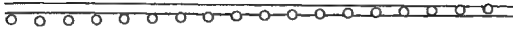
لذلك نحقق نقطة أخرى

لمعرفة نصف المستوى الذي

يمثل منطقة الحل



المتباينات والبرمجة الخطية



هكذا: نحقق ب (٢ ، ٠)

$$(٢) (٢) < ٩$$

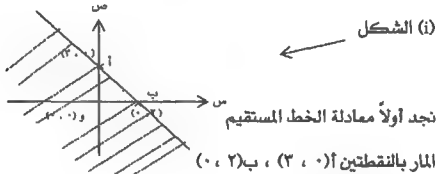
$$٦ < ٩ \text{ صفر نعم}$$

منصف المستوى الذي يحتوي ب (٢ ، ٠) هو منطقة الحل

والمستقيم ينتمي الى منطقة الحل أيضاً.

مثال (٩):

اكتب المتباينة التي تمثل منطقة الحل المظللة في كل من الأشكال التالية:



$$\frac{٣}{٢} - = \frac{٠ - ٣}{٢ - ٠} = \frac{١٠ص - ١١ص}{١١س - ١١س} = ١٣$$

$$ص - ١٣ = م (س - ١٣)$$

ونأخذ النقطة ب (٢ ، ٠) تكون معادلة المستقيم

$$ص - = ٠ - \frac{٣}{٢} = (س - ٢)$$

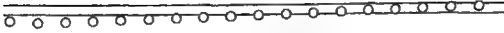
$$٢ (ص - = \frac{٣}{٢} + س)$$

$$٦ + س ٢ - = أي أن ٢ ص - = ٣ + س$$

أو: ٣ + س ٢ = ٦ المعادلة المرافقة.

وبما أن الخط المستقيم متصل فإنه يدخل بالحل والمتباينة تشمل المساواة أيضاً.

المتباينات والبرمجة الخطية



فهناك اختياران إما أن تكون المتباينة:

$$٣ \text{ س} + ٢ \text{ ص} \leq ٦ \quad (\text{أو}) \quad ٣ \text{ س} + ٢ \text{ ص} \geq ٦$$

نحقق نقطة الأصل في كل منها.

$$٦ \stackrel{9}{>} (٠) ٢ + (٠) ٣$$

$$٦ \stackrel{9}{<} (٠) ٢ + (٠) ٣$$

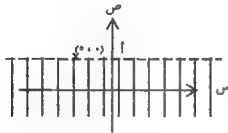
$$٦ \stackrel{9}{>} \text{صفر}$$

$$٦ \stackrel{9}{<} \text{صفر}$$

الجواب نعم

الجواب لا

فالمتباينة: $٣ \text{ س} + ٢ \text{ ص} \geq ٦$



(iii) الشكل

نجد أولاً معادلة الخط المستقيم
المتقطع والذي لا يدخل بمنطقة
الحل والمتباينة لا تشمل المساواة
إطلاقاً.

والحل مباشرة:

ص = ٥ المعادلة المرافقة

وبما أن نقطة ضمن منطقة الحل فإن $ص > ٥$ هي المتباينة المنشودة.

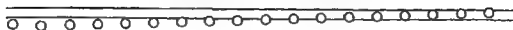
تحقق من نقطة الأصل.

$$٥ \stackrel{9}{>} ٠$$

الجواب: نعم

∴ المتباينة $ص > ٥$





مثال (١٠):

مثل منطقة الحل لنظام المتباينات التالية:

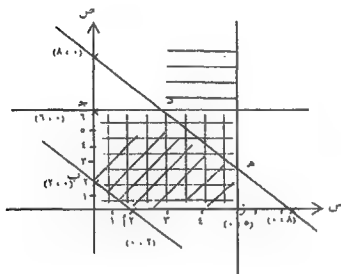
$$س \leq \text{صفر} ، ص \leq \text{صفر} ، س + ص \leq ٢ ، س + ٨ \geq ٨ ، ٥ \geq س ،$$

$$٦ \geq ص$$

بما أن $س \leq \text{صفر} ، ص \leq \text{صفر}$ فإن منطقة الحل ستكون في الربع الأول فقط.

والآن نبدأ بتمثيل المتباينات على سطح بياني واحد هكذا:

$$٥ \geq س$$



$س = ٥$ معادلة مرافقة

والخط متصل

وياتجاه نقطة الأصل

$$٦ \geq ص$$

$ص = ٦$ معادلة مرافقة

والخط متصل

وياتجاه نقطة الأصل

$$س + ص \leq ٢$$

$س + ص = ٢$ معادلة مرافقة

والخط متصل

٢	٠	س
٠	٢	ص

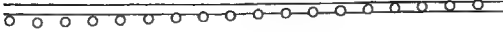
تحقق نقطة الأصل

$$٢ < ٠ + ٠$$

الجواب لا

فمنطقة الحل لا تحوي نقطة الأصل

المتباينات والبرمجة الخطية



$$س + ص \geq ٨$$

$$س + ص = ٨ \text{ المعادلة المرافقة}$$

والخط متصل

٨	٠	س
٠	٨	ص

تحقق نقطة الأصل

$$٨ \stackrel{؟}{\geq} ٠ + ٠$$

الجواب نعم

فمنطقة الحل باتجاه نقطة الأصل، ومنطقة الحل للنظام بلا رتوش كما في الشكل أعلاه.

مثال (١١) :

يبيع تاجر نوعين من المواد التموينية هما: السكر والأرز، ويكلفه الطن الواحد من السكر ٣٠٠٠ دينار، والطن من الأرز ٧٠٠٠ دينار، ويربح في طن السكر عند بيعه ٥٠٠ دينار، كما يربح في طن الأرز ببيعه ٤٥٠ دينار، فإذا كان الطلب المتوقع على المادتين معاً لا يزيد عن ٢٥٠٠ طناً في الشهر، ولا يريد هذا التاجر أن يستثمر أكثر من ٧٥٠٠٠٠ دينار في توفير هاتين المادتين في مخازنه، فكم طناً يجب أن يوفر من كل مادة شهرياً.

اكتب برنامجاً خطياً لهذه المسألة:

السكر الأرز (ص طن)

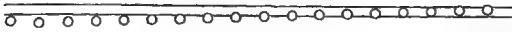
نرتب المعلومات المعطاة

$$(١) \quad س + ص \geq ٢٥٠٠$$

الطلب المتوقع

$$(٢) \quad ٣٠٠٠ + ٧٥٠٠٠٠ \geq ص$$

المتباينات والبرمجة الخطية



الاقتران الهدف $500س + 400ص$

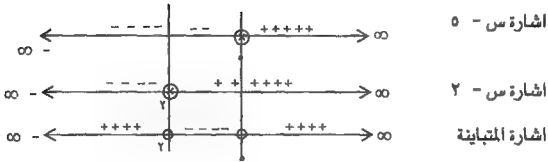
عدم السالبة: $س \leq \text{صفر}$ ، $ص \leq \text{صفر}$

مثال (١٢):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة

بالتخيل $س - ٧ + ١٠ < \text{صفر}$

$(س - ٥) (س - ٢) < \text{صفر}$



مجموعة الحل: $\{س: س > ٢ ، س < ٥\}$

كفترات $(٥ ، ٢) \cup (٢ ، ٥) = ح - [٥ ، ٢]$



مثال (١٣):

أوجد مجموعة حل المتباينة

نرتب الطرف الأيمن حسب قوس س النازلة $٦س - س^٢ - ١٠ > \text{صفر}$

$٦ - (٦س - س^٢ + ١٠ > \text{صفر})$ نجعل $س^٢$ موجب الاشارة

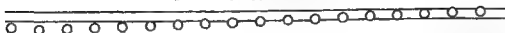
$٦س - س^٢ + ١٠ < \text{صفر}$ نعكس اشارة التباين $>$ الى $<$

مميز الطرف الأيمن ب $١٤ - ٢ = -٦$ ج $-٦(٦ - ١٠ \times ١ \times ٤)$

$٤ - ٣٦ = -٤٠$



المتباينات والبرمجة الخطية



فاشارة المتباينة مثل اشارة \geq موجبة

\therefore مجموعة الحل = ح {س: س \geq ح}

كفترة س = $(-\infty, \infty)$

على خط الاعداد $\leftarrow \text{////////////////} \rightarrow$

مثال (١٤):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة $|س| \geq ٢$

نجزئ هذه المتباينة هكذا:

$|س| \geq ٢$ ① $|س| \geq ٥$ وبعد فك رمز القيمة المطلقة

$(س \geq ٥, س \leq -٥)$ و $(س \geq ٢, س \leq -٢)$

مجموعة الحل للمتباينة $(س \geq ٥, س \leq -٥) \cap (س \geq ٢, س \leq -٢)$

هكذا:



مجموعة الحل = {س: س ≤ -٢ و س ≥ ٢ }

كفترات $[-٢, ٢] \cup [٢, \infty)$

وعلى خط الاعداد $\leftarrow \text{-----} \rightarrow$

مثال (١٥):

حل المتباينة

$(٣ - س) < ١$ بفك الأقواس

المتباينات والبرمجة الخطية



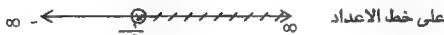
$$9 \leq 1 + 6 \leq 12 + 9$$

$$\frac{12 + 9}{12 + 9} \leq 1 + 6 \leq \frac{12 + 9}{12 + 9}$$

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

$$\text{مجموعة الحل} = \{s : s < \frac{1}{3}\}$$

$$\text{كفترة } s = (\frac{1}{3}, \infty)$$



مثال (١٦):

لينال طالب مجتهد تقدير ممتاز في مبحث الرياضيات، عليه أن يحصل على ما لا يقل عن ٢٧٠ علامة في ثلاثة امتحانات تعقد لهذا المبحث، فإذا حصل الطالب على العلامتين ٩١ ، ٨٤ في الامتحانين الأول والثاني، ما هي العلامات التي يمكن أن يحصل عليها هذا الطالب في الامتحان الثالث؟

علامة الامتحان الأول ٩١

علامة الامتحان الثاني ٨٤

علامة الامتحان الثالث s

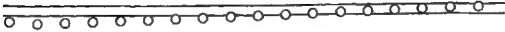
$$84 + 91 + s \leq 270 \quad (1)$$

وبما أن العلامة الكاملة لكل امتحان هي ١٠٠

$$s \geq 100 \quad (2)$$



المتباينات والبرمجة الخطية



$$270 \leq 8x + 91s$$

$$270 \leq 175s$$

$$175 - 175 -$$

$$(1) \quad 95 \leq s$$

من (1) ، (2) تكون

$$100 \geq s \geq 95$$

وعندما كانت العلامات أعداد صحيحة فهي:

$$s \in \{95, 96, 97, 98, 99, 100\}$$

مثال (17):

اكتب المتباينات الى مجموعة حلها ممثلة بالمنطقة المظلة.

الملاحظ بالشكل أن المعادلات المرافقة هي:

$$(1) \quad x = s - 4 \text{ والخط متصل}$$

∴ هناك مساواة

نحقق نقطة الأصل في

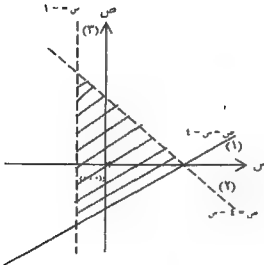
$$\text{الاختيار الأول} \quad x \leq s - 4$$

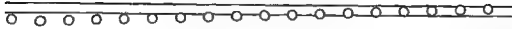
$$0 < -4$$

الجواب نعم

$$\therefore x = s - 4 \text{ المتباينة الأولى}$$

$$(2) \quad x = s - 4 \text{ والخط متقطع فلا مساواة بالمتباينة.}$$





نحقق نقطة الأصل في:

الاختبار الأول: $ص < ٤ -$ من

$$٠ < ٤ - ٠$$

الجواب لا

الاختبار الثاني: $ص > ٤ -$ من المتباينة الثانية

(٣) $ص = - ١$ والخط متقطع فلا مساواة في المتباينة

وبما أن منطقة الحل على يمين الخط المتقطع فهو أكبر من - ١

أي أن $ص < - ١$

نظام المتباينات هو: $ص \leq ٤ -$ من

$ص > ٤ -$ من

$ص < - ١$

مثال (١٨):

ينتج مصنع للأدوات الكهربائية ٩٩ تلفازاً أسبوعياً كحد أقصى، ومن نوعين هما ملون وغير ملون، ويحقق ربحاً مقداره ٢٥ دينار لكل تلفاز من النوع الملون و ١٣ دينار من النوع غير الملون، فإذا كان طلب السوق من تلفازات النوع الأول لا يقل عن ضعف الطلب من نوعه الثاني.

استخدم الطريقة الجبرية (عمليات الصف البسيط لتحديد ما يجب إنتاجه من كل نوع لتحقيق أكبر ربح ممكن. علماً بأن جميع ما ينتج من التلفازات يباع مباشرة)

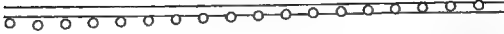
الانتاج أو الطلب	ملون	غير ملون
	(س)	(ص)

نرتب المعلومات المعطاة $ص + ٩٩ \geq$ (١)

$ص \leq ٢$ (٢)



المتباينات والبرمجة الخطية



الاقتران الهدف: $ر = ٢٥س + ١٣ص$

عدم السالبة:

$$\begin{cases} س \leq \text{صفر} \\ ص \leq \text{صفر} \end{cases}$$

نبدأ:

باستحداث متغيرات وهمية جديدة لتحويل المتباينات والاقتران الهدف الى نظام من المعادلات الخطية باستثناء المتباينات المتعلقة بعدم السالبة ($س \leq \text{صفر}$ ، $ص \leq ٠$) هكذا.

$$(١) \quad ١س + ١ص + ل + ك(٠) + ح(٠) = ٩٩$$

$$(٢) \quad ١س - ٢ص + ل(٠) + ك(٠) + ح(٠) = \text{صفر}$$

$$(٣) \quad -٢٥س - ١٣ص + ل(٠) + ك(٠) + ح(٠) = \text{صفر}$$

ثم نقوم بترتيب المعاملات والثوابت كما هو مبين بالجدول:

الاجراءات	الثوابت	ح	ك	ل	ص	س
	٩٩	٠	٠	١	(١)	١
الحد	٠	٠	١	٠	٢ -	(١)
	٠	١	٠	٠	١٣ -	٢٥ -

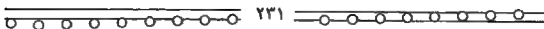
الآن نبحث عن الركيعة الأول وهي العامود س

$$١٠٠ = ١ \div ١٠٠$$

$$\text{صفر} + ١ = \text{صفر}$$

في الصف الثاني

فالركيزتان حولهما دوائر صغيرة في الجدول.



المتباينات والبرمجة الخطية

ونبدأ بالدوران حول الركائز بأن نجعل قيمة كل الركيزة ١ وباقي عناصر العمود
أصفار استعانة بعمليات الصف البسيط كما يلي:

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت
٠	(٢)	١	١ -	٠	٩٩
(١)	٢ -	٠	١	٠	٢٥ ×
٢٥ -	١٢ -	٠	٠	١	٠

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت
٠	(٢)	١	١ -	٠	٩٩
(١)	٢ -	٠	١	٠	٢١ ×
٠	٦٢ -	٠	٢٥	١	٠

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت
٠	(٢)	١	١ -	٠	٩٩
(١)	٢ -	٠	١	٠	٣ ÷
٠	٠	٢١	٤	١	
					٢٠٧٩

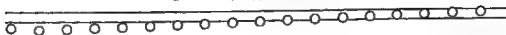
س	ص	ل	ك	ح	الثوابت
٠	(١)	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢} -$	٠	٣٣
(١)	٢ -	٠	١	٠	٢ ×
٠	٠	٢١	٤	١	
					٢٠٧٩

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت
٠	(١)	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢} -$	٠	٣٣
(١)	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٠	٦٦
٠	٠	٢١	٤	١	٢٠٧٩

∴ س = ٦٦ تلفزيوناً ملوناً

ص = ٣٣ تلفزيون غير ملون

المتباينات والبرمجة الخطية



نحقق الهدف:

$$r = 25s + 12 \text{ ص}$$

$$25(66) + 12(23) =$$

$$= 1650 + 279 = 1929$$

$$= 1929 \text{ دينار}$$

مثال (١٩):

(i) أوجد مجموعة الحل للمتباينة

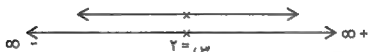
$$s \leq 2$$

نجزئ المتباينة كما يلي:

$$(s < 2) \text{ أو } (s = 2) \text{ أو } (s > 2)$$

$$\text{أي أن } (s < 2) \cup (s = 2) \cup (s > 2)$$

وتوضح هكذا:



مجموعة الحل = ح

وكفترة $(-\infty, \infty)$

وعلى خط الاعداد:

(ii) أي الأزواج المرتبة الآتية يحقق المتباينة

$$3s - 2 \geq 12$$

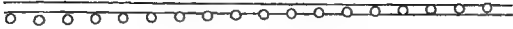
$$\text{أولاً: } (0, 6) \leftarrow 2(6) - 2(0) \geq 12$$

$$\text{الجواب لا } 18 \geq 12$$

∴ (0, 6) لا يحقق المتباينة.



المتباينات والبرمجة الخطية



ثانياً: (١ ، ٤) ← $١٢ - (٤)٢ - (١)٢$

← $١٢ \stackrel{S}{\geq} ٢ - ١٢$

← $١٢ \stackrel{S}{\geq} ١٠$ الجواب نعم

∴ (١ ، ٤) يحقق المتباينة.

ثالثاً: (٤ - ، ٢) ← $١٢ \stackrel{S}{\geq} (٤ -)٢ - (٢)٢$

← $١٢ \stackrel{S}{\geq} ٨ + ٦$

← $١٢ \stackrel{S}{\geq} ١٤$ الجواب لا

∴ (٤ - ، ٢) لا يحقق المتباينة.

رابعاً: (٠ ، ٠) ← $١٢ \stackrel{S}{\geq} (٠)٢ - (٠)٢$

← $١٢ \stackrel{S}{\geq} ٠$ الجواب نعم

∴ (٠ ، ٠) يحقق المتباينة.

مثال (٢٠):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة $٢ \geq \sqrt{(٢ - س)}$

بما أن مجال الاقتران س - ٢ ≤ صفر ← (١)

وكذلك $\sqrt{(٢ - س)} \geq ٢$

س - ٢ ≥ ٤ ← (٢)

ومن (١) ، (٢) $٤ \geq ٢ - س \geq ٠$

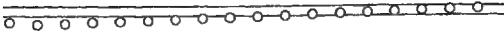
$$\begin{array}{r} ٢ + \quad ٢ + \quad ٢ + \\ \hline ٦ \geq س \geq ٢ \end{array}$$

أي أن $٦ \geq س \geq ٢$

مجموعة = {س: $٦ \geq س \geq ٢$ }

وعلى خط الأعداد





(٩ - ٨) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

$$(١) \text{ حل المتباينة } ٢ < \frac{١}{٢+س}$$

$$\{- \frac{٥}{٢} > - \frac{٥}{٢} > ٢ > ٣\}$$

(٢) حل نظام المتباينات التالي بيانياً على المستوى الديكارتي

$$س + ص \leq ١, \quad س - ص \leq ١$$

$$(٣) \text{ حل المتباينة } ١ \geq \frac{١-س}{١+س}$$

$$(٤) \text{ حل المتباينة } \frac{٢}{٢} < \frac{١}{١+س} \quad \{- \frac{١}{٢}, -١, ١\}$$

$$(٥) \text{ حل المتباينة صفر} \geq (س - ١) (س + \frac{١}{٢})$$

$$\{(-\infty, ١], [\frac{١}{٢}, \infty)\}$$

(٦) أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات:

$$(١) |س - ٢| > ١ \quad \{١, ٣\}$$

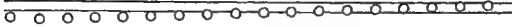
$$(٢) |س - ٢| < ١ \quad \{(-\infty, \frac{١}{٢}), (\frac{١}{٢}, \infty)\}$$

$$(٧) \text{ حل المتباينة } ٤س - ٦س \geq \text{صفر}$$

$$\{[-\frac{٢}{٢}, \infty)\}$$

$$(٨) \text{ حل المتباينة } -١ \leq ٢س < ٤$$

$$\{(-\frac{١}{٢}, ١]\}$$



$$(٩) \text{ إذا علمت أن } \sqrt[2]{2} = 2$$

فأي من الجمل التالية هي الصواب؟

$$(i) 1,41 = \sqrt[2]{2}$$

$$(ii) 1,41 > \sqrt[2]{2}$$

$$(iii) 1,41 < \sqrt[2]{2}$$

{ ارشاد: أوجد $\sqrt[2]{(1,41)}$ أولاً ثم ... }

(١٠) أوجد مجموعة الحل للمتباينات كلاً على انفراد:

$$\left\{ \left(3, \frac{5}{3} \right] \right\}$$

$$(1) \quad 4 \leq \frac{2}{s-3}$$

$$\text{كفترة } \left\{ \left(-\frac{9}{12}, \frac{7}{12} \right) \right\}$$

$$(2) \quad \left| -6 - s \right| > \frac{1}{7}$$

$$\left\{ (11, 2) \cup (3, 5 -) \right\}$$

$$(3) \quad \text{صفر} > \left| 2 - s \right|$$

$$\{ \text{ارشاد: صفر} - s > 2 \quad \text{أو} \quad 8 - s > 2 \}$$

$$\text{كفترة } \left\{ (1, 1 -) \right\}$$

$$(4) \quad s^2 - 1 > \text{صفر}$$

(١١) حل المتباينات التالية:

$$(1) \quad 8 - s - \frac{1}{s} < \text{صفر} , \quad s \neq \text{صفر}$$

{ ارشاد: اجعل الطرف الأيمن اقتران نسبي واحد }

$$(2) \quad \frac{(1+s)(4s^2+2s+1)}{s} < \text{صفر} , \quad s \neq \text{صفر}$$

$$\left\{ \left(\infty, \frac{1}{3} \right) \right\}$$

$$(3) \quad \sqrt[2]{\frac{s-2}{s^2-9}} < \text{صفر}$$

$$\left\{ \left(-\frac{2}{3}, \infty \right) \right\}$$

{ ارشاد: أوجد المجال أولاً }

$$\left\{ \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right] - 1 \right\} \quad (4) \quad |س + 2| \geq 1$$

$$\{ (\infty, 0] \cup (1, -\infty) \} \quad (5) \quad |س + 2| \geq 1$$

(١٢) أي من الأزواج المرتبة التالية: (١، ٤)، (١، ٤)، (٤، ١)، (١، ٤)، (٤، ١)، (١، ٤)، (٤، ١)

يعتبر حلاً للمتباينة س - ص > ٢

$$\{ (١, -١) \}$$

(١٣) مثل بيانياً مجموعة الحل للنظام من المتباينات التالية:

$$س - ص \geq ٢$$

$$٣س - ص \geq ٦$$

$$س \leq ٠, ص \leq ٠$$

(١٤) مزرعة مساحتها ١٥ دونماً، مزروعة بنوعين من المحاصيل أ، ب ويعمل في

المزرعة ٢٠ عاملاً، إذا علمت أن الطن الواحد من المحصول أ يحتاج الى أرض

مساحتها دونم واحد، وعاملين اثنين، ويحقق ربحاً مقداره ٥٠ ديناراً. والطن

الواحد من المحصول ب يحتاج الى ٣ دونمات من الأرض، وعاملين اثنين،

ويحقق ربحاً مقداره ٥٥ ديناراً، كم طناً يجب أن تنتج المزرعة لتحقيق أكبر

ربح ممكن؟

{ هناك الطريقة الجبرية والطريقة الهندسية ولك الحرية في

اختيار الطريقة التي تريد.

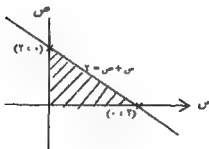
(١٥) أي من أنظمة المتباينات التالية:

$$س + ص \leq ٢, س \leq ٠, ص \leq ٠$$

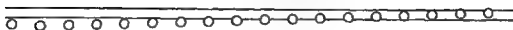
$$س - ص \leq ٢, س \leq ٠, ص \leq ٠$$

$$س + ص \geq ٢, س \leq ٠, ص \leq ٠$$

$$س - ص \geq ٢, س \leq ٠, ص \leq ٠$$



مجموعة حله تُمثل بالمنطقة المظلة في الشكل المجاور؟



(١٦) اكتب البرنامج الخطي للمسألة التالية:

ينتج مصنع نوعين من السلع أ ، ب ويحتاج لإنتاج الوحدة الواحدة من أ الى ساعتين عمل في القسم الأول، و ٤ ساعات عمل في القسم الثاني، ويحتاج لإنتاج الوحدة الواحدة من النوع ب الى ٤ ساعات عمل في القسم الأول، وساعتين عمل في القسم الثاني، والحد الأقصى لعمل كل من القسمين هو ١٢ ساعة، إذا علمت أن ربح الوحدة الواحدة من النوع أ ثلاثة دنانير، ومن النوع ب دينارين، كم وحدة يجب أن ينتج من كل سلعة من أ ، ب لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

(١٧) أي من المتباينات التالية هي الصواب؟

$$(١) \quad ٥ - > ٧ \quad (٢) \quad ٢ \geq ٣ - > ٥$$

$$(٣) \quad \frac{1}{س} > س \text{ حيث } س \in \mathbb{R}^+ \quad (٤) \quad ٢ > س > ٣ \text{ حيث } س \in \mathbb{R}^+$$

{ المتباينة الرابعة }

(١٨) حل المتباينة

$$- ١٨ + ٣ > ٢ س - ٤ > ٣ س - ١٨$$

{ ارشاد: اقسّمها الى مركبتيهما والمرتبطتان بالأداة (و) }

$$\left\{ \left(\frac{٢٢}{٥}, \infty \right) \cup (١٤, \infty) \right\}$$

(١٩) مثل النظام التالي من المتباينات على المستوى الديكارتي:

$$٠ \leq س \leq ٥, \quad ٠ \leq ص \leq ٤$$

(٢٠) صاحب معرض للسيارات سافر الى ألمانيا ويحوزته ٣٢٠ ألف دينار لشراء سيارات صغيرة وحافلات ركاب كبيرة لمعرضه، إذا كان ثمن السيارة الصغيرة ٥ آلاف دينار، وثمان الحافلة الكبيرة ٨ آلاف دينار.

المتباينات والبرمجة الخطية

ما هو أكبر عدد من السيارات الصغيرة والحافلات الكبيرة يمكن شراؤها بهذا المبلغ أو جزء منه؟ علماً بأنه بحاجة إلى ٦ سيارات صغيرة على الأقل و ٧ حافلات كبيرة على الأقل.

(٢١) أوجد مجموعة الحل للمتباينات التالية:

$$\{\phi\} \quad \frac{1}{2} + s - \frac{1}{3} \geq 1 + \frac{2}{3} > 2 + \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\{ح\} \quad 6s - s^2 - 10 > \text{صفر} \quad (2)$$

(٢٢) أي من هذه العبارات صواب؟ وضح بالأمثلة فقط:

(١) إذا كان $s > ص$ فإن $أس > أ ص$ ، $أ > ح$

(٢) إذا كان $s > ص$ فإن $أس > أ ص$ ، $أ > ح$

(٣) إذا كان $s > ص$ فإن $\frac{1}{س} > \frac{1}{ص}$ ، $س ، ص \neq \text{صفر}$

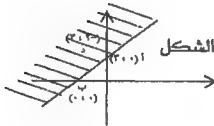
(٢٣) حل المتباينة $\frac{1}{س} < س$ ، $س \neq \text{صفر}$

$$\{(\infty, 1) \cup (1, -\infty)\}$$

{ ارشاد: اجعل المتباينة في طرف واحد }

(٢٤) أي من الأزواج المرتبة الآتية يمثل حلاً للمتباينة $٢ + ص \geq ١٢$

$$(٤, ٣), (٢, ٢), (٢, ٣)$$



(٢٥) اكتب المتباينة التي حلها الهندسي يمثل بالشكل

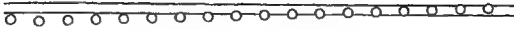
المظلل التالي:

{ ارشاد: أوجد معادلة الخط المستقيم، $٢ - ص \leq ٣$ }

(٢٦) مثل بيانياً نظام المتباينات التالي:

$$س + ص \geq ٦, \quad ٢ + ص + س \geq ١٠, \quad ١٠ + ص + س \geq ٨٠$$

$٠ \leq ص$ ، $٠ \leq س$ وظلل منطقة الحل.



(٢٧) أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات:

$$(١) \text{ س } ٤ + ٥ < \text{ صفر}$$

$$(٢) (٤ - \text{س}) (\text{س} - ٦) \geq \text{صفر}$$

$$(٣) \text{س} - ٣ \geq ٣ - \text{س}$$

$$\{ (-\infty, -١) \cup [١, ٢] \}$$

(٢٨) تُقدِّم شركة مبيعات أجهزة طبية عرضين للأجور لمدوبيها، هكذا،

"ويعتبار عدد القطع التي يبيعها المندوب شهرياً س قطعة"

الأول: ممثلاً بالاقتران ع، (س) = س^٢ - ٢٠ س + ١٥٠ دينار شهرياً

الثاني: ع، (س^٢) = ٧ س + ١٠٠ دينار شهرياً.

متى يكون العرض الأول أفضل من العرض الثاني؟

{ ارشاد: عندما يكون ع، (س) < ع، (س) }

(٢٩) أوجد مجموعة الحل للمتباينة (س - ٢) (س - س^٢) ≥ صفر

$$(٣٠) \text{ حل المتباينة } \frac{1}{5} < \frac{1}{\text{س}} \quad \{ (٠, ٥) \text{ كفترة} \}$$

(٣١) أجب بكلمة واحدة من الكلمتين: "صائبة ، خاطئة":

$$(١) -٢ > ٤ - \text{العبارة} \dots\dots\dots (٤) -٢ \geq ٤ - \text{العبارة} \dots\dots\dots$$

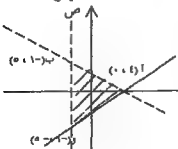
$$(٢) -٢ < ٤ - \text{العبارة} \dots\dots\dots (٥) -٢ \leq ٤ - \text{العبارة} \dots\dots\dots$$

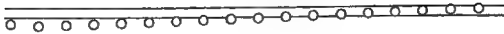
$$(٣) -٢ \neq ٤ - \text{العبارة} \dots\dots\dots (٦) -٢ \leq ٤ - \text{العبارة} \dots\dots\dots$$

(٣٢) اكتب المتباينات الثلاث التي حلها

يمثل بالمنطقة المظلة كما في الشكل

{ ارشاد: استعن بمعادلة الخط المستقيم }





(٣٣) حل المتباينة:

$$\{(-\infty, 5] \cup [5, \infty)\} \quad 25 \leq 2$$

(٣٤) مثل بيانياً نظام المتباينات التالي:

$$2 \leq 2 \leq 4, \quad 2 \leq 2 \leq 4 \text{ وظلل منطقة الحل}$$

$$\{ \text{ارشاد: } 2 \leq 2 \leq 4 \text{ تمثل بيانياً سطح دائرة} \}$$

(٣٥) مثل نظام المتباينات بيانياً وظلل منطقة الحل:

$$|2| \geq 1, \quad |2| \geq 1$$

$$\{ \text{ارشاد: أعد تعريف المتباينات، } 2 \geq 2, \quad 2 \geq 2 \}$$

(٣٦) ما العدد الحقيقي الذي يوجد في مجموعة حل كل من المتباينات:

$$\{ \emptyset \} \quad 2 > 2 - 2 > 2, \quad 2 > 2 - 2 > 2$$

(٣٧) أكمل الفراغات أدناه:

إذا علمت أن:

$$\frac{1}{5} \dots \frac{1}{2} \quad \text{فإن} \quad 5 > 2 \quad (1)$$

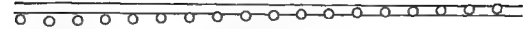
$$\frac{4}{3} \dots \frac{5}{2} \quad \text{فإن} \quad \frac{2}{4} \geq \frac{2}{5} \quad (2)$$

$$(2 - 1) \dots (3 - 1) \quad \text{فإن} \quad (1 - 2) > (1 - 3) \quad (3)$$

علماً بأن $3\sqrt{3} = 1.7$ تقريباً

$$(2) (3 -) \dots (1) (2 -) \quad \text{فإن} \quad 2 > 1 \quad (4)$$

$$\frac{2}{4} \dots \frac{1}{2} \quad \text{فإن} \quad \frac{2}{4} - < \frac{1}{2} - \quad (5)$$



(٣٨) عبّر عن المجموعات التالية على شكل فترات، ومثلها على خط الأعداد:

$$(١) \text{ فـ}_1 = \{ \text{س: س} \geq ٥ \} \text{ ، } \text{ح} - \text{س} \geq ٤$$

$$(٢) \text{ فـ}_2 = \{ \text{س: س} \geq ٥ \} \text{ ، } \text{ح} - \text{س} \geq ٥$$

$$(٣) \text{ فـ}_3 = \{ \text{س: س} \geq ٥ \} \text{ ، } \text{ح} - \text{س} \geq ٥$$

$$(٤) \text{ فـ}_4 = \{ \text{س: س} \geq ٤ \text{ أو } \text{س} \geq ٩ \} \text{ ، } \text{ح} - \text{س} \geq ٤$$

{ ان تبسيط المجموعة هو: $\text{س} \geq ٤$ أو $\text{س} \geq ٩$ ، $\text{ح} - \text{س} \geq ٤$ }

والجواب: $[٩, ٤] \cup [٤, \text{ح} - \text{س}]$

(٣٩) حل المتباينات التالية ومثل منطقة حل كل منها على خط الأعداد:

$$(١) \text{ س} - ٧ < ٥ \text{ ، } (٢) -\frac{٣}{٤} \text{ س} \leq -\frac{٧}{٨}$$

$$(٣) ٦ - ٧ \text{ س} \geq ٨ - ٢ \text{ ، } (٤) ٢ \text{ س} + ٧ < ٩ - ٤ \text{ س}$$

$$(٥) ٦,٢ + ٤,٢ \text{ س} > ١١,١$$

(٤٠) اشترى تاجر عدداً من علب الحلوى (س علبة) بمبلغ ٢١٢ ديناراً، ويبيع العلبة

الواحدة منها بمبلغ ٥ دنانير، ما أقل عدد من العلب يجب أن يبيعها حتى

يكسب؟

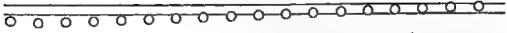
{ ارشاد: المكسب = ثمن البيع - تكلفة الشراء ، $\text{س} - ٥ < ٢١٢$ صفر }

(٤١) أشر الى المتباينات الخطية فيما يلي:

$$٣ \text{ س}^٢ + \text{ص} \leq ٢ \text{ ، } \text{ص} > -٣ \text{ ، } \text{س} + \text{ص} \geq ٥$$

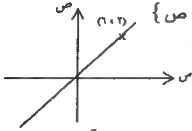
$$٢ \text{ س} - \text{ص} \leq ١ \text{ ، } \sqrt{\text{ص} + ١} < ٥ \text{ ، } ٣ + \text{ص} < -٥$$

$$\frac{١}{\text{ص}} - \frac{١}{٣} > ٣$$



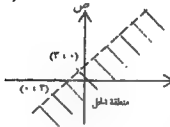
(٤٢) مثل بيانياً منطقة الحل للمتباينة $3 \leq x$ ص

{ ارشاد: استعن بالمعادلة المرافقة $x = 3$ ص }



(٤٣) ظلل منطقة حل المتباينة

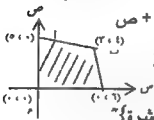
$x \leq 2$ ص على الشكل المجاور



(٤٤) اكتب المتباينة التي تمثل المنطقة المظلة

{ ارشاد: أوجد معادلة الخط المستقيم

الواصل بين النقطتين }



(٤٥) أوجد القيمة العظمى للاقتران $Q = 3x + y$ ص

في ظل القيود المروضة والممثلة بالمضلع المظلل في

{ ارشاد: تعويض نقط الاطراف في الاقتران مباشرة }

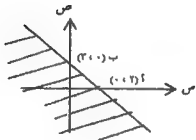
(٤٦) المنطقة المظلة تمثل حل المتباينة

$$(1) \quad 2x + 3y \leq 6$$

$$\text{أو (ب)} \quad 2x + y \leq 6$$

$$\text{أو (ج)} \quad 2x + 3y \geq 6$$

$$\text{أو (د)} \quad 2x + 3y \geq 6$$



(٤٧) ارسم منطقة حل نظام المتباينات وظللها:

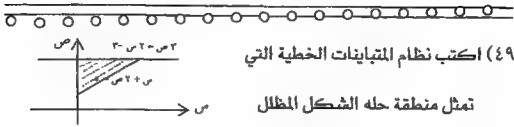
$$x + y \leq 10, \quad 2x + y \geq 8, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

(٤٨) أي من النقط التالية (١، ٢)، (١، ٢)، (٠، ٠)

$$(2, 0), (1, 4), (1, -2)$$

يحقق النظام $2x - 3y > 0$ ص

$$2x + y \geq 6$$



(٥٠) يُحضّر أخصائي تغذية وجبات خاصة مستخدماً نوعين من الأطعمة،

يحتوي الكيلوغرام من الأول: ٧٠٠ وحدة كالسيوم و ٥٠٠ وحدة حديد و ٣٥٠ وحدة فيتامين ب

يحتوي الكيلوغرام من الثاني: ٣٥٠ وحدة كالسيوم و ٣٥٠ وحدة حديد و ٧٠٠ وحدة فيتامين ب

فإذا كانت الحدود الدنيا لمحتويات هذه الوجبة:

٢٨٠ وحدة كالسيوم ١٦٠ وحدة حديد ١٨٠ وحدة فيتامين ب

اكتب نظام المتباينات الخطية الذي يبين وزن كل من نوعي الأطعمة التي يمكن استخدامها في تحضير الوجبة الغذائية.

(٥١) يُريد رجل أن يستثمر من أمواله ما لا يزيد عن ٢٠٠٠٠ دينار في مشاريع ذات

داخل مضمون وثابت، فنصحه خبير اقتصادي بشراء سندات تنمية حكومية بفائدة ٩٪ سنوياً وسندات اقراض لاحدى الشركات الصناعية بفائدة ١١٪ سنوياً. فقرر الرجل أن يستثمر ما لا يقل عن ٦٠٠٠ دينار في السندات الحكومية وأن لا يزيد المبلغ المستثمر في الشركات الصناعية عن مثلي المستثمر في السندات الحكومية. ما المبلغ الذي يُستثمر في كل من النوعين من السندات ويجعل العائد السنوي أكبر ما يمكن؟ اكتب البرنامج الخطي فقط.

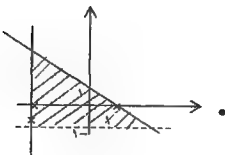
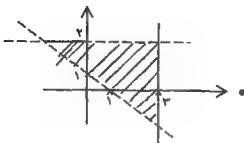
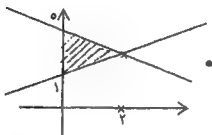
$$\{r = 0.09s + 0.11v\}$$

(٥٢) تُنتج مطحنة نوعين من الدقيق، تريح بالطن الواحد من النوع الأول ٢٠

دينار، وتريح بالطن الواحد من النوع الثاني ٣٠ دينار، ويجب انتاج ما لا يقل عن ٦٠ طن من النوع الأول وما لا يزيد عن ١٠ أطنان من الثاني اسبوعياً. فإذا كان الحد الأدنى للانتاج الاسبوعي ١٠٠ طن، جد كمية الدقيق من كل من النوعين الواجب انتاجه اسبوعياً لتحقيق أكبر ربح ممكن بالطريقتين الهندسية والجبرية.

(٥٣) صل بخط بين نظام المتباينات، والتمثيل البياني الذي يمثل "الشكل المظلل"

"بالقائمة ب"

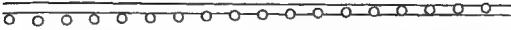


"بالقائمة أ"

$$\begin{aligned} & \text{س} \geq 2 \\ & \text{ص} > 2 \\ & \text{ص} < 1 - \text{س} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ص} < 1 \\ & \text{س} \leq 2 \\ & \text{ص} \geq 1 - \text{س} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\text{س} + 2\text{ص} \geq 10 \\ & \text{ص} \leq \text{س} + 1 \\ & \text{س} \leq 0 \end{aligned}$$



(٥٤) جد مجموعة الحل للنظام $6س - ص \geq 16$

$س + ٥ ص \geq ١٢$

$س \leq ٠, ص \leq ٠$ بيانياً

(٥٥) ترغب إحدى الجمعيات الخيرية توزيع نوعين من المعاطف الشتوية من ذات الحجمين الكبير والصغير على العائلات الفقيرة، فإذا كان سعر المعطف الكبير ٨ دنانير وسعر المعطف الصغير ٤ دنانير، وخصصت الجمعية المذكورة ٨٨ ديناراً لشراء المعاطف. اكتب المتباينة التي تبين عدد المعاطف الممكن شراؤها من كلا الحجمين، ثم مثلها بيانياً.

{ ارشاد: ليس من الضروري الشراء بالمبلغ كاملاً مع أنه هو الأفضل }

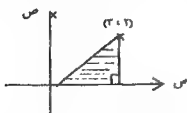
(٥٦) تنتج إحدى الدول العربية ٦٠٠٠٠ طن من البترول يومياً، وتستخدم لتصديره نوعين من الناقلات، الأول يحمل ٢٠٠٠٠ طن في الرحلة الواحدة، والثاني يحمل ١٥٠٠٠ طن في الرحلة الواحدة، إذا استخدمت الدولة ٣ ناقلات من النوع الأول، ٤ ناقلات من النوع الثاني. علماً بأن ميناء التصدير لا يمكنه أن يشمل يومياً أكثر من ٥ ناقلات. جد عدد الناقلات من كل نوع الذي يمكن الدولة من تصدير بترولها بأقل عدد ممكن من الناقلات.

(٥٧) أوجد مجموعة الحل للنظام $6س \geq ١٠, ص \geq ٥, س + ٢ ص \leq ٢٠, س \leq ٠$

$ص \leq ٠$ هندسياً وأوجد أكبر قيمة للاقتراح $٢س + ٣ص$

(٥٨) أوجد مجموعة الحل للمتباينة $١٠ - ٥س > ١٠$

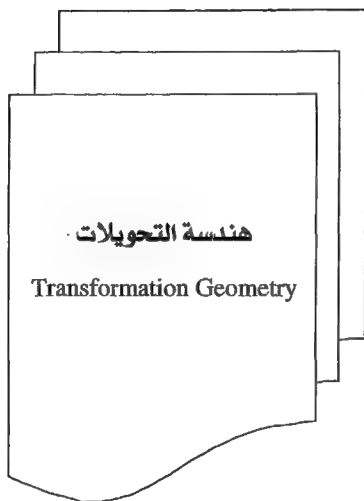
(٥٩) ما قيمة أكبر عدد صحيح للمتغير $س$ بحيث أن $٥س - ١ > ٢٨$ { ٥ }

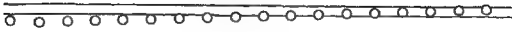


(٦٠) اكتب نظام المتباينات الخطية والذي

مجموعة حله ممثلة بالمنطقة المظلة

كما في الشكل.



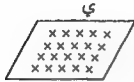


(١ - ١) التساويات القياسية^(*) Isomemtries

هندسة التحويلات فرعٌ من فروع الهندسة، وهذا الفرع يبحث في دراسة الأشكال الهندسية بأسلوب يسمى التساويات القياسية، والتحويل الهندسي بلفة الاقترانات؛ هو اقتران تناظر من المستوى الى نفسه يرسم كل نقطة من نقط المستوى فوق نقطة أخرى من نقط نفس المستوى.

فإذا كانت ي مجموعة النقط في المستوى س فإن التحويل الهندسي هو اقتران تناظر من ي الى ي.

بحيث أن كل نقطة ن في ي تُرسم فوق نقطة واحدة



نَ في أيضاً:

أي أن نَ = ر (ن)

حيث نَ هي صورة ن بواسطة اقتران التناظر "ر"

ومن المعلوم أن الصورة يجب أن تكون وحيدة.

واقتران التناظر ر يجعل الشكلين الهندسيين متطابقين، اذا وجد تساوي قياسي يرسم أحدهما فوق الآخر.

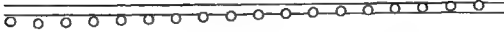
وفي هذا الفصل سنناقش التساويات القياسية المستوية التالية:

(٢ - ١) الانعكاس Reflection

الانعكاس تحويل هندسي انبثقت فكرته من ملاحظتنا لما نشاهده من صور لأجسامنا عندما نقف أمام المرآة، أو أي سطح لامع لتحسين هندامنا.

سُمي الانعكاس باسمه هذا لأنه تحويل هندسي يُكوّن صوراً لأشكال معكوسة جانبياً كما في الشكل.

^(*) هذا لا يمنع من وجود تحويلات هندسية غير قياسية كالتمدّد (التمكّر أو التمعير)



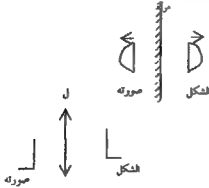
وأما المرآة أو ما يحل محلها كخط

مستقيم ل تسمى محور الانعكاس

Axis of Reflection

والانعكاس يحفظ الأطوال بلا زيادة

ولا نقصان لا بالشكل ولا بالأحجام



عند ايجاد صوراً لها، ولكنه يقلبها جانبياً كما في الشكلين أعلاه.

ويكون بعد الصورة عن محور الانعكاس يساوي بعد الشكل عن المحور

نفسه.

ويمكن استخدام المحورين الاحداثيين كمحاور للانعكاس كما يلي:

الانعكاس في محور السينات:

بما أن بعد الصورة عن المحور تساوي بعد الشكل (نقطة أو قطعة مستقيمة

أو شكل هندسي) عن المحور، فإن:

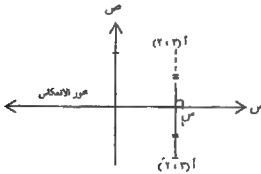
لإيجاد صورة أ بالانعكاس في محور

السينات، ننزل العمود أ س، على

محور السينات ونجده على استقامته

بقدر نفسه ليصبح أ س، أ وتصبح

أ (٢، ٣) صورة أ (٢، ٣)



أي أن صورة أ (س، ص) بالانعكاس في محور السينات هي أ (س، -ص)

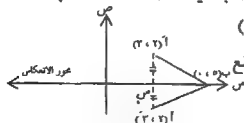
أي بتغيير إشارة المقيط الثاني (الصادي) فقط.

وبناء عليه فإن صورة القطعة المستقيمة أ ب حيث أ (٢، -٣) ، ب (٥ / ٠)

هي أ ب حيث أ (٢، ٣) هي صورة أ (٢، -٣)

والنقطة ب (٥، ٠) فهي صورة نفسها لأنها تقع

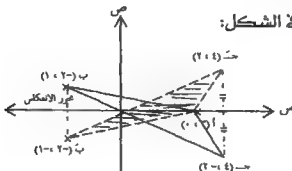
على محور الانعكاس



هندسة التحويلات

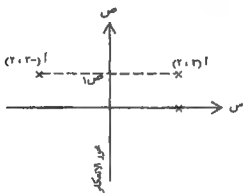
وأما صورة المثلث أ ب ج حيث أ (٣ ، ٠) ، ب (٢ ، ١) ، ج (٤ ، ٢) -

فهو المثلث أ ب ج كما في الشكل:



وإذا كان محور الانعكاس هو محور الصادات، فإن إشارة المسقط الأول

(السيني) هي التي تتغير كما يلي:



فإن صورة أ (٣ ، ٢) :

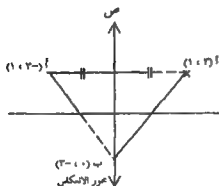
ننزل العمود الأفقي أ ص

ونعده على استقامته إلى أ (٣ ، ٢ -)

وكذلك صورة القطعة المستقيمة أ ب حيث أ (٣ ، ١) ، ب (٣ ، ٠) ،

هي أ ب ، حيث أ (٣ ، ١ -) ، ب (٣ ، ٠) هي

صورة أ (٣ ، ١) :



والنقطة ب (٣ ، ٠) هي صورة نفسها

لأنها تقع على محور الانعكاس

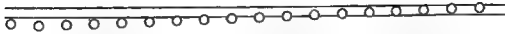
وبشكل عام يمكن أن نلخص الانعكاسات كتحويل هندسي بواسطة

المحورين كما يلي:

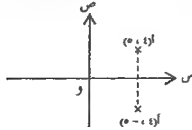
أولاً: أن صورة أ (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات هي أ (س ، - ص)

تغيير إشارة المسقط الصادي مع الحفاظ على قيمته المطلقة.

هندسة التحويلات

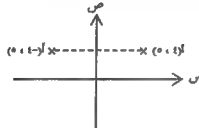


مثل أن صورة $A(0, 4)$ بالانعكاس في محور السينات هي $A'(0, -4)$ كما في الشكل.



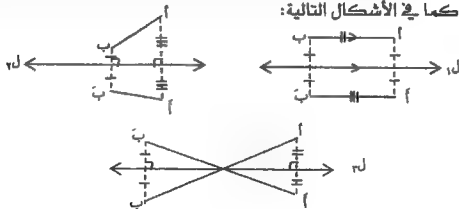
ثانياً: أن صورة $A(0, 4)$ بالانعكاس في محور الصادات هي $A'(-4, 0)$ تغيير إشارة السيني مع الحفاظ على قيمته المطلقة.

مثل أن صورة $A(0, 4)$ بالانعكاس في محور الصادات هي $A'(-4, 0)$ كما في الشكل.

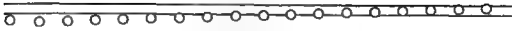


وهكذا فإن الانعكاس كتحويل هندسي وواحد من التساويات القياسية يحقق العديد من الخواص والصفات نبرزها كما يلي:

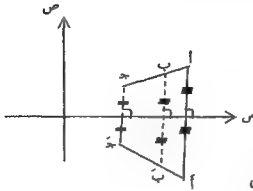
(i) الانعكاس يحفظ أطوال القطع المستقيمة: أي أن الانعكاس يرسم أي قطعة مستقيمة (كمجموعة من النقط) فوق قطعة مستقيمة أخرى تطابقها



فإذا كانت القطعة المستقيمة $AB \parallel l$ فإن $A'B' \parallel l$ أيضاً ومنها $AB \parallel A'B'$



(ii) الانعكاس يحفظ البينية :Betweenes



والتفسير: اذا كانت النقطة ب

تقع بين النقطتين أ ، ج فإن

صورتها ب' تقع بين صورتي

النقطتين أ ، ج' (صورتي أ ، ج)

بالانعكاس على نفس محور الأشكال

وليكن محور السينات، كما في الشكل

ويعبر عن ذلك رياضياً.

إذا كانت ن (أ ، ب ، ج) فإن ن' (أ' ، ب' ، ج')

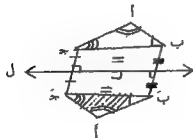
فإذا كانت النقط أ ، ب ، ج على استقامة واحدة، فإن المصور أ' ، ب' ، ج' تقع

على استقامة واحدة أيضاً. كما في الشكل أيضاً.

(iii) الانعكس يحفظ مقياس الزوايا Angles Measure :

في المثلثين أ ب ج ، أ' ب' ج' المتطابقين حيث أ صورة أ' ، ب' صورة ب' ، ج'

صورة ج' فإن الانعكاس عامود الانعكاس (ل) يبقي قياسات الزوايا كما يلي:

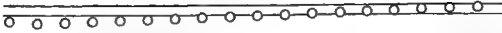


$$\angle A = \angle A'$$

$$\text{وكذلك } \angle B = \angle B'$$

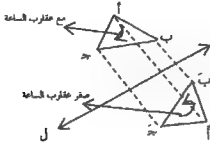
$$\text{وكذلك } \angle C = \angle C'$$

كما في الشكل.



(iv) الانعكاس يعكس الاتجاه الدوراني Reverses Orientation:

ان الشكل المجاور يوضح انعكاس المثلث أ ب ج بالانعكاس في العمود ل



من الملاحظ أن الاتجاه الدوراني

حول رؤوس المثلث أ ب ج هو

اتجاه مع عقارب الساعة.

وأما الاتجاه الدوراني حول

صورته بالانعكاس في المحور ل

أ ب ج فهو ضد عقارب الساعة

لذلك يسمى الانعكاس تساوي

قياس عكسي Reverser Isometric وهذا ما يسمى بشكل عام بالانقلاب الجانبي.

(v) الانعكاس يحفظ التوازي Parallelism:

إذا كانت القطعة المستقيمة أ ب // محور الانعكاس ل فإن صورتها أ ب' // المحور



ل كما في الشكل:

وبالتالي فإن أ ب' // أ ب

مثال:

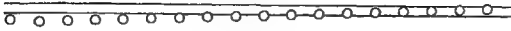
أوجد احداثيات صورة كل نقطة من النقاط الآتية بالانعكاس:

(i) بالنسبة لمحور السينات

(ii) بالنسبة لمحور الصادات

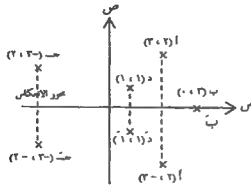
(iii) بالنسبة للمستقيم ص = ص

أ (٢ ، ٣) ، ب (٣ ، صفر) ، ج (- ٣ ، ٢) ، د (١ ، ١)

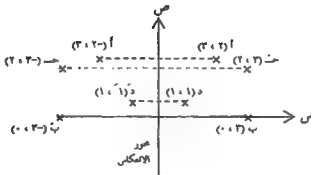


أولاً: بالنسبة لمحور السينات:

مع ملاحظة أن صورة ب (٢ ، ٠) هي نفسها ب (٠ ، ٢) كونها على محور الانعكاس (محور السينات)



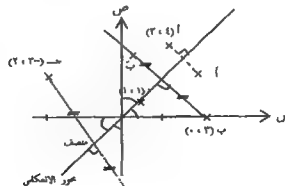
ثانياً: بالنسبة لمحور الصادات

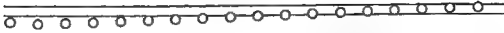


ثالثاً: بالنسبة للمستقيم ص = س

اما احداثيات أ ، ب ، ج ، فتعين بالرسم الدقيق ولا علاقة لها بالانعكاس بالمحور السيني أو الصادي إطلاقاً.

مع ملاحظة أن صورة د هي نفسها د كونها واقعة على محور الانعكاس ص = س





(١٠ - ٣) الدوران Rotation:

تحويل ل هندسي وتساوي قياس ناتج عن دوران شعاع.. أو شكل هندسي في مستوى حول نقطة ثابتة في المستوى نفسه تسمى مركز الدوران وبزاوية معلومة تسمى زاوية الدوران كما في الشكل.



ليكن α شعاع في المستوى S فإذا دار هذا الشعاع باتجاه معاكس لساعات عقارب الساعة حول النقطة O

فإنه يأخذ الوضع α' وهذا دوران موجب مركزه النقطة O وبزاوية مقدارها θ° (مقياس الزاوية موجب).

وأما الدوران السالب فهو الحاصل من دوران α حول O النقطة O وباتجاه دوران عقارب الساعة،



ومركزه النقطة O وبزاوية θ° (مقياس الزاوية سالب)

ومن الملاحظ أن النقطة الوحيدة التي ترسم فوق نفسها هي مركز الدوران O

والمثلث يمكن أن يدور حول أحد رؤوسه كمركز للدوران كما في



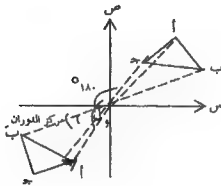
والدوران يمكن أن يكون باتجاه دوران عقارب الساعة أي دوران سالب أو صفر دوران عقارب الساعة أي دوران موجب.

وهناك الدوران المحايد Identity Rotation:

عندما يدور الشكل 360° حذف أو دورة كاملة ليعود وينطبق على نفسه وكأنه ما دار إطلاقاً.

والدوران يمكن أن يوضح باستخدام الاحداثيات الديكارتية في المستوى الديكارتي كما يلي:

أي شكل هندسي كالمثلث مثلاً يمكن أن يدور دورة كاملة أو جزءاً منها حول نقطة الأصل كما في الشكل.



إذا دار المثلث أ ب ج نصف دورة حول النقطة و (مركز الدوران) فإن صورته تصبح أ' ب' ج'

$$\text{حيث } \begin{matrix} \text{دوران} \\ \text{أ} \\ 180^\circ \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{دوران} \\ \text{ب} \\ 180^\circ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{دوران} \\ \text{ب} \\ 180^\circ \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{دوران} \\ \text{ج} \\ 180^\circ \end{matrix}$$

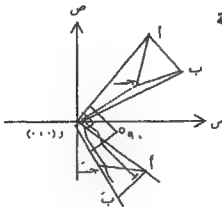
$$\begin{matrix} \text{دوران} \\ \text{ج} \\ 180^\circ \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{دوران} \\ \text{أ} \\ 180^\circ \end{matrix}$$

وبعدها أ ب ج $\begin{matrix} \text{دوران} \\ \text{أ} \\ 180^\circ \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{دوران} \\ \text{ب} \\ 180^\circ \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{دوران} \\ \text{ج} \\ 180^\circ \end{matrix}$ مع عقارب الساعة أو عكسها سيان.

فمركز الدوران نقطة الأصل و (0 ، 0)

وزاويته 180° والدوران موجب أو سالب "الوضع نفسه".

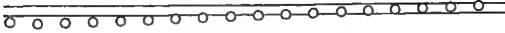
ويمكن أن يدور المثلث أ ب ج ربع دورة (90°) حول نقطة الأصل كما في الشكل.



الدوران سالب حيث أنه مع عقارب الساعة

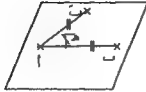
مركزه نقطة الأصل و (0 ، 0)

وزاويته 90° ربع دورة.



والآن سنناقش خصائص الدوران كتحويل هندسي قياسي:

(i) الدوران يحفظ الأطوال:



فإذا دارت القطعة المستقيمة $أ ب$

حول النقطة $أ$ كما في الشكل

بزواية مقياسها $هـ$ فإن صورتها

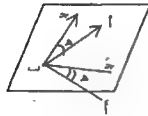
تصبح $أ ب'$

ومن البدهة يمكن أن نلاحظ أن $أ ب = أ ب'$

القطعتان المستقيمتان $أ ب$ ، $أ ب'$ متساويتان في الطول.

أو $أ ب$

(ii) الدوران يحفظ مقاييس واتجاه الزوايا (سالب أو موجب):



إذا دارت الزاوية "كما في الشكل"

حول الرأس $ب$ فإن مقياس الزاوية

$أ ب ج =$ مقياس الزاوية $أ ب ج' = هـ$

سواء أكان الدوران مع أو ضد عقارب

الساعة.

(iii) الدوران يحفظ الاستقامة السينية: فإذا كانت النقطة $ب$ محصورة بين

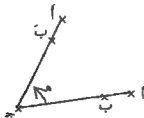
النقطتين $أ$ ، $ج$ كما في الشكل $أ ب ج$ ودارت القطعة المستقيمة $أ ج$

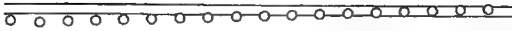
في المستوى $س$ حول النقطة $ج$ بزواية $هـ$ ضد عقارب الساعة تصبح صورتها بالدوران

$أ$ ، $ب'$ ، $ج$ ($ج$ تبقى نفسها لأنها مركز الدوران)

والنقطة $ب'$ صورة $ب$ تبقى بين $أ$ صورة $أ$

والنقطة $ج$ صورة $ج$ نفسها.





(iv) الدوران يحفظ التوازي:

إذا كانت القطعة المستقيمة أ ب

توازي القطعة المستقيمة ج د

ودارت كل منها نصف دورة حول

نقطة الأصل و (0, 0) كما في

الشكل فإن أ ب // ج د كما في

الشكل. أي أن:

إذا كان أ ب // ج د $\xrightarrow[\text{دوران } 180^\circ]{\text{دوران } 180^\circ}$ أ ب // ج د

الدوران سالب حيث أنه مع عقارب الساعة

وزاويته $\rightarrow 180^\circ = (\text{نصف دورة})$

وكتطبيق على الانعكاس والدوران سنناقش التماثل Symmetry:

مبدئياً يقال للشكل أنه متماثل إذا أمكن طيه حول مستقيم بحيث يتطابق

نصف الشكل حول هذا المستقيم، عندها يسمى المستقيم:

محور التماثل Axis of Symmetry:

كالدائرة المتماثلة حول أي خط مستقيم ينطبق على أي قطر منها كما في

الشكل:



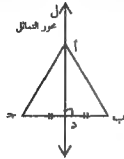
حيث ل محور التماثل

لأنه ينطبق على القطر أ ب

مما يجعل نصف الدائرة الأعلى يطابق نصف الدائرة الأسفل.

هالانعكاس الذي يجعل الشكل منطبقاً على نفسه يسمى تماثلاً لهذا الشكل.

فالثلث المتساوي الساقين متماثل حول المستقيم المار بالعامود المنصف التنازل من رأسه على قاعدته، كما في الشكل.



كون التماثل يتولد عن الانعكاس، ولأن

المثلث أ ب ج $\xrightarrow{\text{محور الانعكاس}}$ المثلث أ ب ج

أي المثلث وصورته بالانعكاس ينطبقان على بعضهما البعض.

فالمثلث أ ب ج متماثل حول المحور المار بالعامود المنصف للقاعدة (أ د).

وهكذا يكون التماثل حول مستقيم (محور تماثل) وقد يكون التماثل

حول نقطة (مركز التماثل) كون التماثل يتولد عن الدوران حول نقطة كما في الشكل.



عندما يدور المستطيل أ ب ج د 180° حول

النقطة م (مركز الدوران) ينطبق على نفسه

لذا تصبح النقطة م (مركز التماثل) أي أن

\square أ ب ج د $\xrightarrow[180^\circ]{\text{حول م}}$ \square ج د أ ب وهو نفسه المستطيل.

أي ينطبق المستطيل على نفسه.

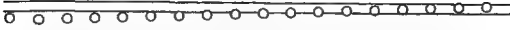
مع تغيير في رؤوسه.

حيث أ $\xrightarrow{\text{تصبح بعد الدوران}}$ ج

ب $\xrightarrow{\text{تصبح بعد الدوران}}$ د

ج $\xrightarrow{\text{تصبح بعد الدوران}}$ أ

د $\xrightarrow{\text{تصبح بعد الدوران}}$ ب



فالتماثل رياضياً لمجموعة من النقط هو أي تساوي قياسي يرسم هذه النقط فوق نفسها (وليس بالضرورة كل نقطة فوق نفسها). كما في الشكل.



حيث المستقيم $ل$ المنطبق على قطره

أ ج هو محور تماثل أي أن:

أ صورتها ← أ

ب ← ب

د ← د

ج ← ج

وهكذا لبقية النقط.

وبالتالي أ ب ج د ← صورته أ د ج ب

والتماثل ظاهرة تتصف بالانتظام، ومنتشرة بكثرة في الحياة اليومية بشكل يجلب الانتباه، إذ أنه من الممكن الحصول على هذا التماثل البسيط إذا ما نظرنا الى ملعب كرة القدم قبل بداية المباراة لمشاهدة ترتيب اللاعبين على نصفي الملعب يشكّل تماثل كما في الشكل.



علماً بأن كل فريق

١١ لاعب موزعين

كما في الشكل.

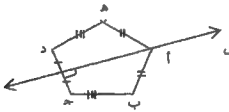
والملاحظ أن هناك أشكالاً هندسية منتظمة غير متماثلة حول محور مثل متوازي الأضلاع $أ ب ج د$ الذي لا يمكن طيه حول مستقيم ليصبح نصفه الأول منطبقاً على نصفه الثاني.

هندسة التحويلات

وكذلك الشكل الرباعي $ا ب ج د$ شكل هندسي غير منتظم وليس له محور تماثل.

وكذلك المثلث المنفرج الزاوية $ا$ وغيرها من الأشكال.
مثال:

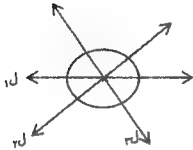
ارسم محور التماثل (إن وجد) للشكل الخماسي المنتظم (المخمس $ل$) محور التماثل والذي يمر بأحد رؤوسه مثل $ا$



وعامودي على الضلع المقابل $د ج$ كما في الشكل.

مثال:

حدد هندسياً تماثلات الدائرة.



للدائرة محاور تماثل لا نهائية حيث أن كل مستقيم ينطبق على أي قطر فيها هو محور تماثل لها.

وعلى سبيل المثال المحاور: $ل, ل, ل, ل, ل, \dots$

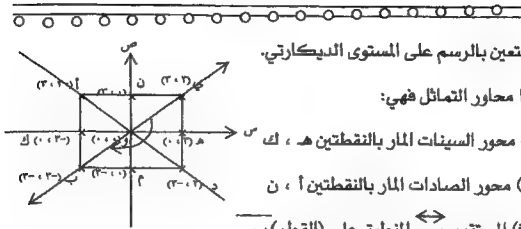
وعلى المستوى الديكارتي يمكن بيان محور تماثل أو محاور تماثل الأشكال الهندسية المنتظمة المتماثلة كالمربع والمستطيل والدائرة والمثلث المتساوي الساقين والمثلث المتطابق الأضلاع ... هكذا.

إذا كانت النقط $ا (٣ - , ٣)$

ب $(٣ - , ٢)$

ج $(٣ - , ٢)$

د $(٣ - , ٢)$ رؤوس مربع، جد أربعة تماثلات لهذا المربع



نستعين بالرسم على المستوى الديكارتي.

أما محاور التماثل فهي:

- (i) محور السينات المار بالنقطتين هـ ، ز
 - (ii) محور الصادات المار بالنقطتين أ ، ن
 - (iii) المستقيم د ب المنطبق على القطر د ب
 - (iv) المستقيم ج ب المنطبق على القطر أ ج
- وجميع هذه المحاور تمر بنقطة الأصل.

مع ملاحظة أن المربع أ ب ج د يمكن أن يدور نصف دورة حول نقطة الأصل لتتكون نقطة الأصل هي مركز لدوران التماثل مع أو ضد عقارب الساعة.

لينطبق المربع على نفسه بتغيير رؤوسه فقط هكذا:

أ ← دوران 90° ج

ب ← د

ج ← أ

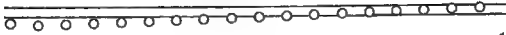
د ← ب

يصبح المربع أ ب ج د 180° الدوران ← المربع نفسه ولكن باسم ج د أ ب .

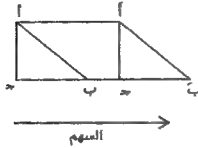
"وهذا يؤكد أن التماثل ناتج عن انعكاس يعكس دوران وعند دوران بمركز دوران وزاوية دوران".

× الانسحاب Translation:

تحويل هندسي وتساوي قياسي ناتج عن حركة الشكل الهندسي بشروط معينة، كون الشكل الهندسي إذا ما سُحب باتجاه محدد فإن صورته تبقى مطابقة



تماماً له كما في الشكل.



هنا سحِب المثلث أ ب ج باتجاه

اليمين (اتجاه السهم)

هنا المثلث أ ب ج يطابق المثلث

الأصلي.

وهكذا فإن الانسحاب ينقل جميع نقط (الشكل) للمسافة نفسها أي أن

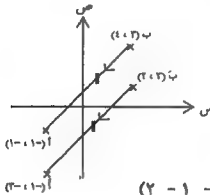
المسافات بين أ ، أ وبين ب ، ب وبين ج ، ج متساوية تماماً. وفي نفس الاتجاه (هنا

اتجاه السهم أو اليمين).

وأما الانسحاب على المستوى الديكارتي يتوضح بالتالي:

إذا كانت أ (- ١ ، ١) ، ب (٣ ، ٤) بين تأثير الانسحاب بمقدار

وحدتين للأسفل.



أ (- ١ ، ١) ← وحدتين للأسفل

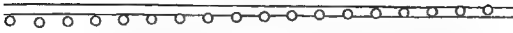
أ (٣ ، ٤) ←

ب (٣ ، ٤) ← وحدتين للأسفل

ب (٢ ، ١) ←

وكان الانسحاب للأسفل يؤثر على الاحداثي الصادي فقط بالنقصان

وأما الانسحاب للأعلى فيؤثر على الاحداثي الصادي فقط بالزيادة.



والانسحاب لليمين يؤثر على الاحداثي السيني فقط بالزيادة

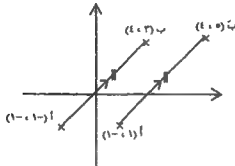
والانسحاب لليساار يؤثر على الاحداثي السيني فقط بالنقصان

فإذا كانت أ $(-1, 1)$ ، ب $(2, 4)$ بين تأثير الانسحاب لليمين بمقدار وحدتين

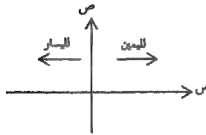
$$\text{أ } (-1, 1) \xrightarrow[\text{لليمين}]{\text{وحدتين}} \text{أ' } (-1, 1+2) = (-1, 3)$$

$$\text{وكذلك ب } (2, 4) \xrightarrow[\text{لليمين}]{\text{وحدتين}} \text{ب' } (2, 4+2) = (2, 6)$$

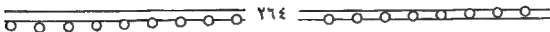
كما في الشكل.

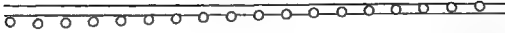


وبشكل عام الانسحاب لليمين واليسار هكذا:



والانسحاب للأعلى والأسفل هكذا:





وبشكل عام:

الانسحاب اليسار يتم بالنقصان، وباليمين يتم بالزيادة

وللأسفل يتم بالنقصان، وللأعلى يتم بالزيادة

أي اليسار وللأسفل ← نقصان، لليمين والأعلى ← زيادة

مثال:

إذا كانت صورة أ (س ، ص) ← أ (س + ٣ ، ص - ١) فجد صور رؤوس

المثلث د ه و حيث

$$د = (٢ ، - ١)$$

$$هـ = (١ ، ١)$$

$$و = (٤ ، ٤)$$

تحت تأثير الانسحاب نفسه.

أولاً: نفسر العبارة أ (س ، ص) ← أ (س + ٣ ، ص - ١)

الاحداثي السني (س) يصبح (س + ٣) أي انسحاب لليمين ٣ وحدات. أي أن جميع النقاط د ، هـ ، و تتسحب لليمين ٣ وحدات.

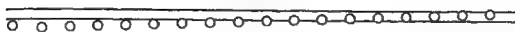
والاحداثي الصادي ص يصبح ص - ١ أي انسحاب للأسفل ١ وحدة. وجميع النقاط تتسحب للأسفل بوحدة واحدة هكذا:

$$أ (س ، ص) ← أ (س + ٣ ، ص - ١)$$

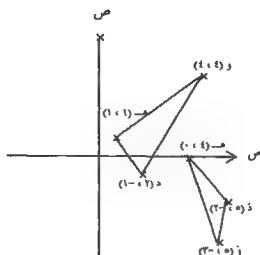
$$د (٢ ، - ١) ← د (٢ + ٣ ، - ١ - ١) ← د (٥ ، - ٢)$$

$$هـ (١ ، ١) ← هـ (١ + ٣ ، ١ - ١) ← هـ (٤ ، ٠) (صفر)$$

$$و (٤ ، ٤) ← و (٤ + ٣ ، ٤ - ١) ← و (٧ ، ٣)$$



والشكل التالي يوضح الانسحاب:



ومن خصائص الانسحاب:

(i) الانسحاب يحفظ القيمة:

ويمبر عن ذلك باختصار شديد:

ن (أ ، ب ، ج) ← ن (أ' ، ب' ، ج')

أي أن النقطة ب تقع بين أ ، ج

وكذلك صورتها ب' تقع بين أ' ، ج'

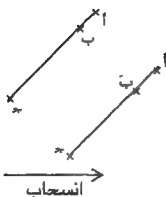
(ii) الانسحاب يحفظ الأطوال والاستقامة:

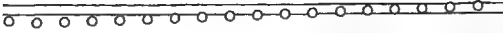
ويمبر عن ذلك باختصار شديد:

بما أن أ ب ج قطعة مستقيمة فإن أ ب' ج' قطعة مستقيمة أيضاً.

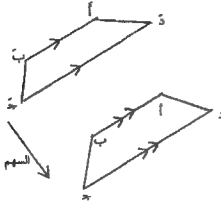
وأن طول أ ب = طول أ ب'

وكذلك طول ب ج = طول ب' ج'





(iii) الانسحاب يحفظ التوازي:

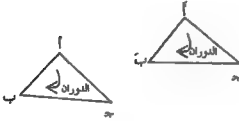


ان انسحاب شبه المنحرف

باتجاه السهم يبقى $AB \parallel DC$

كون $AB \parallel DC$

(iv) الانسحاب يحفظ الاتجاه الدوان:



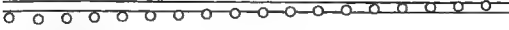
الانسحاب للمثلث ABC

باتجاه السهم.

يبقى المثلث ABC

بنفس الاتجاه الدوران، إذ يسمى ABC باتجاه دوران عقارب الساعة.

وكذلك ABC يسمى باتجاه دوران عقارب الساعة كما هو واضح في الشكل. \therefore



وأخيراً سنوجز صفات مجموعات التساويات القياسية Group of Isometries كما يلي:

التساويات القياسية كتحويلات هندسية مستوية تحفظ:

الأطوال والمساحات والحجوم للأشكال الهندسية.

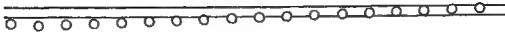
وتتضمن الانعكاس والدوران والانسحاب. وهي نوعان هما:

الأول: تساويات قياسية مباشرة Direct Isometries:

وهي التي تحفظ الاتجاه الدوراني مثل الدوران والانسحاب.

الثاني: تساويات قياسية عكسية Opposite Isometries:

وهي التي تعكس الاتجاه الدوراني أي تقلب الشكل جانبياً مثل الانعكاس.

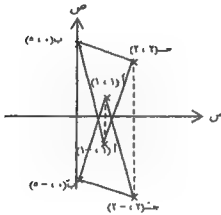


(١٠ - ٥) أمثلة محلولة على المتباينات والبرمجة الخطية

مثال (١):

جد صورة المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ (١ - ، ١) ، ب (٥ ، ٠) ، ج (٢ ، ٢) بالانعكاس في محور السينات.

الحل:



نجد صورة كل من رؤوسه وهي:

أ ← صورة
ع محور السينات

ب ← صورة
ع محور السينات

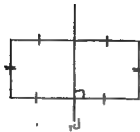
ج ← صورة
ع محور السينات

∴ أ ب ج هي صورة المثلث أ ب ج بالانعكاس في محور السينات.

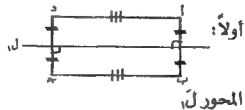
مثال (٢):

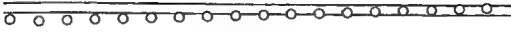
حدد محورين فقط، تتماثل كل من الأشكال التالية (إن وجدت).

(١) المستطيل:

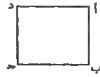


ثانياً:



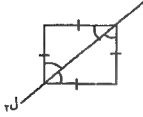


(٢) المربع:



أولاً:

ثانياً:

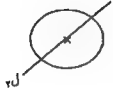


(٢) الدائرة:



أولاً:

ثانياً:



ملحوظة:

للدائرة محاور تماثل غير نهائية، حيث كل قطر فيها هو محور تماثل لها.

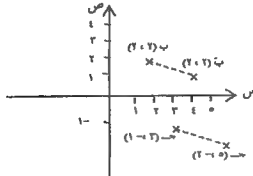
مثال (٣):

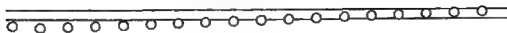
إذا كانت صورة النقطة أ (س، ص) هي النقطة أ' (س + ٢، ص - ١) جد صور النقطة ب (٢، ٢)، ج (٢، - ١) تحت تأثير الانسحاب نفسه.

$$\text{ب (٢، ٢) } \xrightarrow{\text{صورتها}} \text{ب' (٢ + ٢، ٢ - ١) = (٤، ١)}$$

$$\text{والنقطة ج (٢، - ١) } \xrightarrow{\text{صورتها}} \text{ج' (٢ + ٢، - ١ - ١) = (٤، - ٢)}$$

كما في الشكل التالي.





مثال (٤):

إذا كانت صورة أ (س ، ص) ← أ (س + ٣ ، ص - ١)

فجد صور رؤوس المثلث د ه و حيث د (٢ ، -١) ، ه (١ ، ١) ، و (٤ ، ٤)
تحت تأثير نفس الانسحاب، قارن بين أطوال أضلاع المثلثين د ه و ، د ه و المتناظرة.

$$\text{د (٢ ، -١)} \xrightarrow{\text{صورتها}} \text{د' (٢+٣ ، -١-١) = (٥ ، -٢)}$$

$$\text{ه (١ ، ١)} \xrightarrow{\text{صورتها}} \text{ه' (١-١ ، ١+٣) = (٠ ، ٤)}$$

$$\text{و (٤ ، ٤)} \xrightarrow{\text{صورتها}} \text{و' (٤-٤ ، ٣+٤) = (٠ ، ٧)}$$

$$\text{د ه} = \sqrt{(١-٢)^2 + (١-(-١))^2} = \sqrt{٥}$$

$$\text{د ه'} = \sqrt{(١-٥)^2 + (١-(-٢))^2} = \sqrt{٢٥}$$

$$\text{ه و} = \sqrt{(٤-١)^2 + (٤-١)^2} = \sqrt{١٨}$$

$$\text{ه و'} = \sqrt{(٤-٠)^2 + (٤-٤)^2} = \sqrt{١٦}$$

$$\text{د و} = \sqrt{(٤-٢)^2 + (٤-(-١))^2} = \sqrt{٢٥}$$

$$\text{د و'} = \sqrt{(٤-٥)^2 + (٤-(-٢))^2} = \sqrt{٢٥}$$

$$\text{د ه} = \sqrt{(١-٢)^2 + (١-(-١))^2} = \sqrt{٥}$$

$$\text{د ه'} = \sqrt{(١-٥)^2 + (١-(-٢))^2} = \sqrt{٢٥}$$

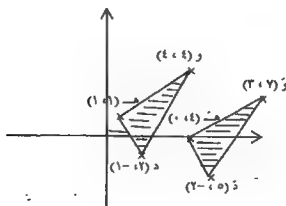
$$\text{ه و} = \sqrt{(٤-١)^2 + (٤-١)^2} = \sqrt{١٨}$$

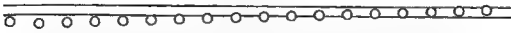
$$\text{ه و'} = \sqrt{(٤-٠)^2 + (٤-٤)^2} = \sqrt{١٦}$$

$$\text{د و} = \sqrt{(٤-٢)^2 + (٤-(-١))^2} = \sqrt{٢٥}$$

$$\text{د و'} = \sqrt{(٤-٥)^2 + (٤-(-٢))^2} = \sqrt{٢٥}$$

كما في الشكل التالي:





نستج أن أطوال أضلاع المثلثين المتناظرة متساوية، وهذا يبين أن الانسحاب تحويل هندسي يحفظ الأطوال، لذا فهو تحويل هندسي قياسي أو تساوي قياسي.

مثال (٥):

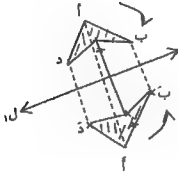
حدد صورة الشكل أ ب ج د التالي بالانعكاس بمحور الانعكاس ل_١

ويلاحظ أن أ ب ج د مقلوب جانبياً

بالنسبة للشكل أ ب ج د حيث يقرأ

باتجاه عكس عقارب الساعة بينما

أ ب ج د يقرأ مع اتجاه عقارب الساعة.

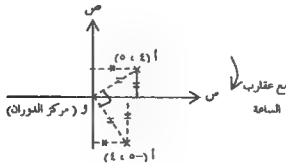


مثال (٦):

حدد صورة النقطة أ (٤ ، ٥) على المستوى الديكارتي بدوران مقياسه

(مقداره) ٩٠° حول نقطة الأصل وباتجاه عقارب الساعة.

أ (٤ ، ٥) دوران ٩٠° مع عقارب الساعة ← أ' (-٥ ، ٤)

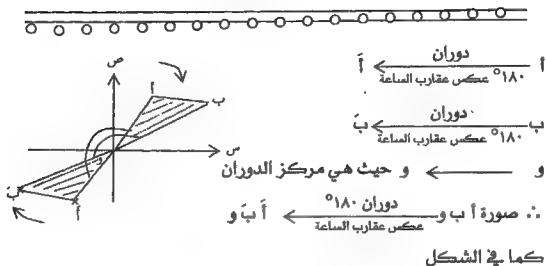


مثال (٧):

إذا كان أ ب ج مثلث فحدد صورته على المستوى الديكارتي بدوران

وقياسه ١٨٠° حول نقطة الأصل، ويعكس اتجاه عقارب الساعة.



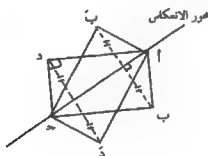


من الملاحظ أن الدوران لا يقلب الاتجاه.

فالمثلث أ ب و يُقرأ مع عقارب الساعة، وكذلك أ ب و يُقرأ مع عقارب الساعة أيضاً.

مثال (٨):

حدد صورة المستطيل أ ب ج د بواسطة الانعكاس حول قطره أ ج.



الحل:

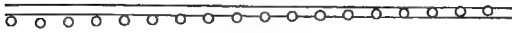
أ ← صورتها (لأنها واقعة على محور الانعكاس)

ب ← ب'

ج ← ج' (لأنها واقعة على محور الانعكاس)

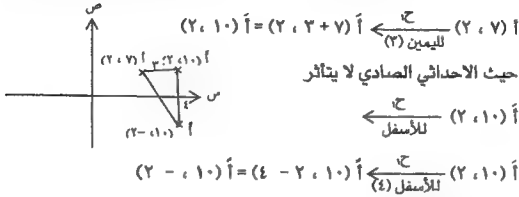
د ← د'

∴ صورة أ ب ج د الانعكاس حول محور الانعكاس أ ج بالقطر أ ج "كما في الشكل"



مثال (٩):

أوجد صورة النقطة أ (٧ ، ٢) تحت تأثير الانسحاب ح، باتجاه اليمين وبمقدار ٢ وحدات، ثم تحت تأثير الانسحاب ح، باتجاه الأسفل وبمقدار ٤ وحدات.



حيث الاحداثي السيني لا يتأثر

وكان أ (٧ ، ٢) بانسحاب مقداره أ' (٢ ، ١٠) والذي يمكن إيجاد مقداره من نظرية فيثاغورس كما يلي:

$$أ' أ = \sqrt{٥^2 + ٨^2} = \sqrt{٨٩}$$

كون أ' أ قائم الزاوية

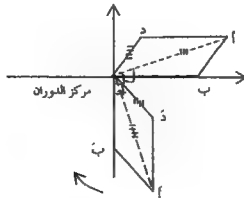
$$٨٩ = ٥^2 + ٨^2$$

وحدات

وباتجاه أ' كما في الشكل.

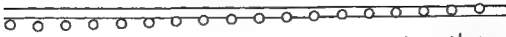
مثال (١٠):

أوجد صورة متوازي الأضلاع أ ب ج د بدوران حول الرأس ج وبزاوية ٩٠° مع عقارب الساعة.



الحل:





أ دوران
حول ج ٩٠° ←

ب دوران
حول ج ٩٠° ←

ج لأنها مركز الدوران ←

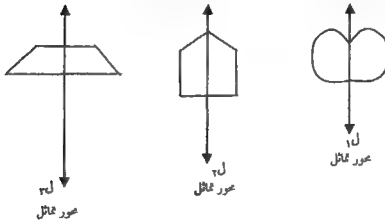
د دوران
حول ج ٩٠° ←

∴ أ ب ج د صورته ←

ويقرأ باتجاه عقارب الساعة أي كما يُقرأ أ ب ج د
فالدوران لا يعكس الاتجاه.

مثال (١١):

ارسم محور التماثل الوحيد لكل من الأشكال التالية:



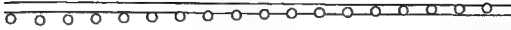
مثال (١٢):

حدد مركز دوران المثلث المتطابق الأضلاع وزاوية الدوران ليصبح مركز
تماثل للمثلث.

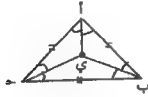
الحل:

مركز الدوران أو مركز تماثل المثلث المتطابق الأضلاع هو نقطة التقاء
مستقيماته المتوسطة أو منصفات زوايا كونها هي نفسها. كما في الشكل.





وهو النقطة ي



والدوران وبأي اتجاه (مع أو ضد عقارب

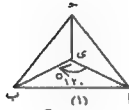
الساعة) ويزوايا قياسها:

$$^{\circ}120 = \frac{^{\circ}360}{3} \quad (i)$$

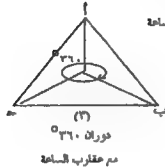
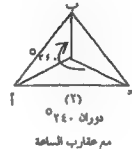
$$^{\circ}240 = ^{\circ}120 + ^{\circ}120 \quad (ii)$$

$$^{\circ}360 = ^{\circ}120 + ^{\circ}120 + ^{\circ}120 \quad (iii)$$

كما في الأشكال التالية:



(١)
دوران $^{\circ}120$
مع عقارب الساعة



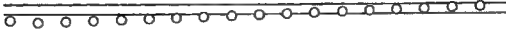
ويمكن ايجاز الدورانات كما يلي:

(١) أ ب ج $\xrightarrow[\text{مع عقارب الساعة}]{\text{دوران } ^{\circ}120}$ ج أ ب وهو نفسه أ ب ج (تماثل)

(٢) أ ب ج $\xrightarrow[\text{مع عقارب الساعة}]{\text{دوران } ^{\circ}240}$ ب ج أ وهو نفسه أ ب ج (تماثل)

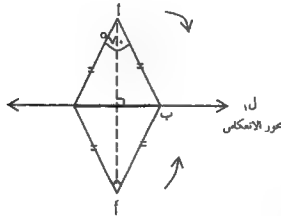
(٣) أ ب ج $\xrightarrow[\text{مع عقارب الساعة}]{\text{دوران } ^{\circ}360}$ أ ب ج (تماثل)

أي للمثلث المتطبق الأضلاع ثلاثة تماثلات: بالدوران حول نقطة التقاء المستقيمت المتوسطة فيه أو حول نقطة التقاء منصفات زواياه.



مثال (١٣):

أ ب ج مثلث متساوي الساقين، فيه $أ ب = أ ج$ وقياس الزاوية $ح = ٧٠^\circ$
أوجد صورته بالانعكاس بمحور مار بقاعدته ب ج



أ $\xrightarrow{\text{انعكاس عامود ب ج}}$ أ

ب $\xrightarrow{\text{انعكاس عامود ب ج}}$ ب لأنها واقعة على محور الانعكاس

ج $\xrightarrow{\text{انعكاس عامود ب ج}}$ ج لأنها واقعة على محور الانعكاس

$\therefore أ ب ج \xrightarrow{\text{انعكاس عامود ب ج}}$ أ ب ج

من الملاحظ أن أ ب ج يُقرأ مع عقارب الساعة

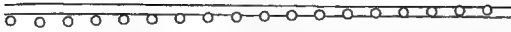
أما صورته أ ب ج فتقرأ ضد عقارب الساعة

من هنا نقول الانعكاس يقلب الشكل جانبياً.

مثال (١٤):

أجب بنعم أو بلا فقط:

(i) الانعكاس يحفظ ترتيب النقاط (البينية) \leftarrow الجواب نعم



(ii) كل تحويل هندسي يكون تساويًا قياسيًا ← الجواب لا

(iii) المربع له محور تماثل واحد فقط ← الجواب لا

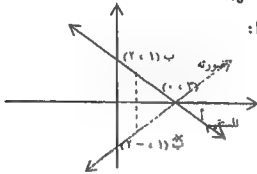
(iv) الدوران يحفظ مقاييس الزوايا ← الجواب نعم

مثال (١٥):

أوجد معادلة صورة المستقيم $s + v = 3$ بالانعكاس حول محور السينات.

نجد نقطتين على المستقيم وصورة كل منهما

بالانعكاس حول محور السينات هكذا:



أولاً: أفضل نقطة هي:

أين يقطع المستقيم $s + v = 3$ محور السينات.

نضع $v = 0$

$$s = 3$$

∴ $(3, 0)$ تقع على المستقيم وعلى صورته كونها على محور الانعكاس.

نجد نقطة أخرى على المستقيم $s = 1$

$$∴ 3 = 1 + v$$

$$v = 2$$

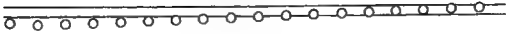
∴ ب $(1, 2)$ تقع على المستقيم

نجد صورة ب $(1, 2)$ بالانعكاس حول محور السينات ← ب' $(1, -2)$

ولإيجاد معادلة صورة المستقيم المار بالنقطة أ $(3, 0)$ ، ب' $(1, -2)$

$$m = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{0 - 2}{3 - 1} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{0 - 2}{3 - 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

هندسة التحويلات



$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{ص} - \text{ص}_1)$$

لنأخذ النقطة أ (٢ ، ١)

$$\text{ص} - ١ = ٠ (\text{ص} - ٢)$$

∴ ص = ص - ٢ هي معادلة صورة المستقيم ص = - س + ٣ كما في

الشكل.

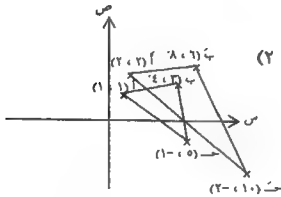
مثال (١٦):

إذا كان أ ب ج مثلث رؤوسه أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٤) ، ج (٥ ، -١) حدد صورته على المستوى الديكارتي بالانسحاب ح (س ، ص) ← (٢ ، ٢ ص) ثم استنتج أن المثلث وسورته متشابهان.

$$\text{أ} (١ ، ١) \leftarrow \text{أ} (٢ ، ٢)$$

$$\text{ب} (٢ ، ٤) \leftarrow \text{ب} (٨ ، ٦)$$

$$\text{ج} (٥ ، -١) \leftarrow \text{ج} (١٠ ، -٢)$$



نجد النسب بين أضلاع المثلث وصورته المتناظرة كما يلي:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3^2 + 1^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2}}{\sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\text{وكذلك} \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{10^2 + 1^2}}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{(10-2)^2 + (-2-6)^2}}{\sqrt{(5-2)^2 + (-1-4)^2}} = \frac{\sqrt{8^2 + (-8)^2}}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{64}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{17}}$$



$$\frac{2}{1} = \sqrt[4]{\frac{116}{29}} = \sqrt[4]{\frac{116}{29}}$$

$$\frac{\sqrt{16+64}}{\sqrt{4+16}} = \frac{\sqrt{(2-2)^2 + (2-10)^2}}{\sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ أ}} \quad \text{وكذلك}$$

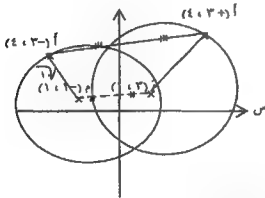
$$\frac{2}{1} = \sqrt[4]{\frac{80}{20}} = \sqrt[4]{\frac{80}{20}}$$

بما أن أضلاع أ ب ج ، أ ب ج المتناظرة متناسبة

∴ أ ب ج يشابه أ ب ج

مثال (١٧):

ارسم الدائرة التي مركزها م (١ ، ٢) وتر بالنقطة أ (٤ ، ٣) ثم حدد صورتها بالانعكاس بمحور الصادات، وثم أوجد معادلة صورتها بعد الانعكاس.



$$\sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2} = \text{نق}$$

$$\sqrt{(2)^2 + (1-)^2} =$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} =$$

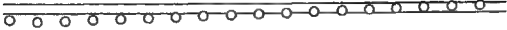
لإيجاد صورتها بالانعكاس بمحور الصادات نجد صورة مركزها م (١ ، ٢) والنقطة التي تمر بها أ (٤ ، ٣) حول محور الصادات هكذا:

م (١ ، ٢) $\xrightarrow[\text{الصادات}]{\text{انعكاس حول محور}}$ م' (١ ، -٢) (حيث الاحداثي الصادي لا يتأثر)

أ (٤ ، ٣) $\xrightarrow[\text{الصادات}]{\text{انعكاس حول محور}}$ أ' (٤ ، -٣) (حيث الاحداثي الصادي لا يتأثر)

معادلة صورة الدائرة:

$$\text{نق} = \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$



$$\sqrt{10} = \sqrt{1 - v} + \sqrt{2 - v}$$

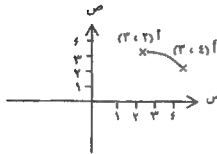
$$10 = 1 + v - 2\sqrt{2 - v} + 2 - v$$

$$9 = -2\sqrt{2 - v} \Rightarrow \sqrt{2 - v} = -\frac{9}{2}$$

مثال (١٨):

صف الانسحابات التي أثرت على النقطة التالية حيث:

أ (٣ ، ٢) ← انسحاب (٣ ، ٤) واكتب قاعدته.



على شكل قاعدة

التمثيل بالرسم أولاً.

بما أن أ (٣ ، ٢) ← انسحاب (٣ ، ٤)

وبالملاحظة أن الاحداثي الصادي لم يتأثر

وانما الاحداثي السيني ازداد بمقدار ٢ وحدة

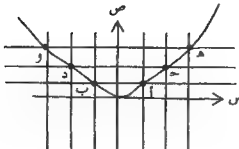
فهو انسحاب لليمين بوحدين.

أي أن أ (٣ ، ٢) ← انسحاب لليمين بوحدين (٣ ، ٢ + ٢)

وقاعدته:

أ (س ، ص) ← أ (س + ٢ ، ص)

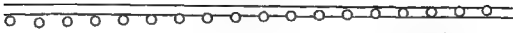
مثال (١٩):



اعتمد على الشكل المجاور وأجب

عما يلي: ما تأثير الانعكاس في محور

المصادات على النقط التالية؟



١ انعكاس
محور الصادات ← الجواب (ب)

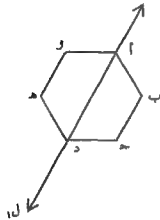
ب انعكاس
محور الصادات ← الجواب (ا)

وكذلك ج ← د

د ← ج وهكذا...

مثال (٢٠):

حدد محاور التماثل للشكل الممدادسي المنتظم (المسدس).



أولاً: ل

محور التماثل المار بقطره أ د

حيث الانعكاس حوله كما يلي:

ا ← ا

ب ← و

ج ← هـ

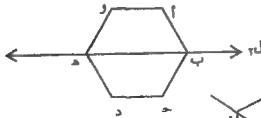
د ← د

هـ ← ج

أي أ ب ج د هـ و ← محور التماثل أ د و هـ د ج ب = المسدس نفسه

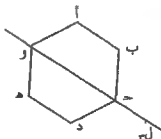
وكذلك ل

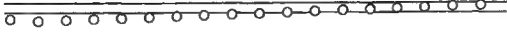
المار بقطره ب هـ



وكذلك ل

المار بقطره ج و





(١٠ - ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من المدارس والدارسات

(١) أجب عما يلي بشيء من الاختصار مع التوضيح بالرسم أو بالتمثيل البياني:

(١) ما عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الساقين؟ {١}

(٢) ما عدد محاور تماثل الشكل السداسي المنتظم؟ {٦}

(٣) ما عدد محاور تماثل المثلث المتطابق الأضلاع؟ {٣}

(٤) ما صورة النقطة (٢ ، -٥) بالانعكاس في نقطة الأصل؟ {(٥ ، ٢)}

(٥) ما صورة النقطة (٢ ، -٥) بالانعكاس في محور السينات ثم في محور

الصادات على التوالي؟ {(٥ ، ٢)}

(٦) ما صورة النقطة (٣ ، ٠) بالانعكاس في محور السينات؟ {(٣ ، ٠) نفسها}

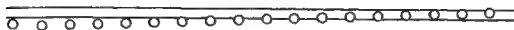
(٧) ما قياس زاوية الدوران المحايد؟ $\{0^\circ\}$

(٨) ما صورة النقطة (٢ ، -٥) بالانسحاب الذي قاعدته:

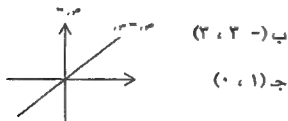
{(١ ، ٢) ← (١ ، ٢) - (١ ، ٢)}

(٩) ارسم صورة المضلع أ ب ج د بالانعكاس في المحور ل كما في الشكل:





(٣) عَيِّن صور كل من النقط أ (٥ ، ٣)



بالانعكاس في المحور ص = س كما في الشكل.

(٤) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، أوجد صورته بدوران مقياسه - ٩٠° حول

نقطة حول نقطة الأصل وعلى المستوى الديكارتي كما في الشكل.



(٥) ما احداثيات صور كل من النقط:

$$(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}), (2, 0), (3, 2 -), (2 - , 3)$$

بدوران مقياسه نصف دورة حول نقطة الأصل وعلى المستوى الديكارتي.

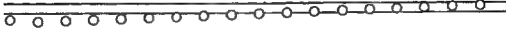
(٦) ما احداثيات صور كل من النقط (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٣ -) ، (٢ - ، ٣ -)

بالانسحاب الذي قاعدته (س ، ص) ← (س + ١ ، ص + ٢) على المستوى الديكارتي.

(٧) اذا كانت النقطة هـ صورة النقطة هـ (٢ ، ١ -) وكانت م صورة النقطة

م (١ ، ٣) بالانعكاس في محور الصادات، احسب طول القطعة المستقيمة هـ م وكذلك هـ م.

$$\{ \sqrt{17}, \sqrt{17} \}$$



(٨) يبين أن مُنْصَف الزاوية هو محور تماثل لها.

{ ارشاد: استعمل تطابق المثلثات }

(٩) إذا كانت النقطة أ (٠ ، ٠) ، ب (٣ ، ٠) ، ج (٣ ، ٢) ، د (٠ ، ٢) هي

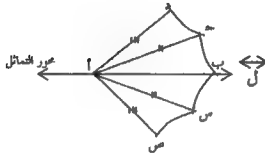
رؤوس مستطيل، ما إحداثيات رؤوسه بالانسحاب بمقدار ٥ وحدات للأسفل،

وما مساحة المستطيل أ ب ج د والمستطيل أ ب ج د حيث أ صورة أ ، ب

صورة ب ، ج صورة ج ، د صورة د.

{ ٦ ، ٦ }

(١٠) من الشكل المجاور عيّن:



(١) صورة المثلث أ ج د

(٢) صورة المثلث أ ب س

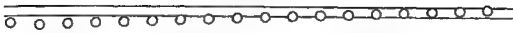
{ المثلث أ س ص . المثلث أ ب ج }

(١١) إذا كان ق (س) = |س| ، استعن بالرسم لكتابة قاعدة ق (س) بالانسحاب

مقداره وحدتين للأعلى، واكتب قاعدته أيضاً بالانسحاب مقداره وحدتين

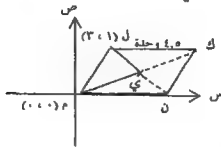
للأسفل.

{ ق (س) = |س| + ٢ ، ق (س) = |س| - ٢ }



(١٢) اعتمد على الشكل الذي يمثل متوازي الأضلاع م ن ك ل لإيجاد إحداثي

الرأس ك ونقطة تقاطع قطريه ي.



{ ارشاد: جد إحداثيات النقطة ن ، ك بالانسحاب }

(١٣) عَيِّن صورة المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ (٢ ، ٣) ، ب (٤ ، ١) ، و (٠ ، ٠)

بالانعكاس في محور الصادات، وما نوع كل من المثلثين أ ب و ، أ ب و من حيث الأضلاع.

(١٤) حدد محوراً واحداً فقط لتمثيل كل من الأشكال الهندسية التالية:



السداسي المنتظم



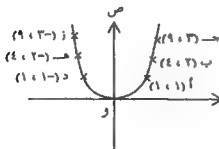
المثلث



المربع



الدائرة



(١٥) عَيِّن انعكاس الشكل المجاور

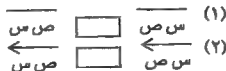
في محور الصادات، ثم انعكاسه

في محور السينات كلاً على انفراد.

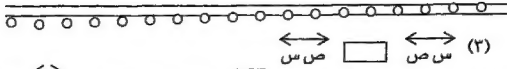
(١٦) ما إحداثيات صور النقطتين أ (٣ ، ٠) ، ب (٠ ، ٣) بالانعكاس في

المستقيم ص = - س.

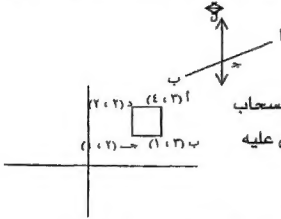
(١٧) ضع في المستطيل أدناه أحد الرمزتين ، ≠



٢٨٦



(١٨) ارسم صورة القطعة المستقيمة أ ب بالانعكاس حول المحور ل كما في الشكل.



(١٩) ارسم صورة المربع أ ب ج د بعد انسحاب للأسفل بمقدار ٣ وحدات، وعيّن عليه احد اثبات رؤوسه بعد ذلك.



(٢٠) ارسم صورة حرف Z (المكبر كما في الشكل) بعد دورانه بزاوية قياسها 90° حول النقطة أ وياتجاه عكس عقارب الساعة.

(٢١) اذا كانت النقط أ (١٢ ، ٢١) ، ب (١٢ ، ١٢) ، ج (٠ ، ١٢) ، د (٠ ، ١٦) بيّن أن المثلثين أ ب ج ، ج د ب متشابهان، حيث و نقطة الأصل.

(٢٢) اذا كانت النقطتان أ (٢ ، ٦) ، ب (٤ ، ٥) وكانت أ_١ ، ب_١ هما صورتها بالانعكاس حول محور السينات، وكانت أ_٢ ، ب_٢ هما صورتها (أي أ ، ب) بالانعكاس حول محور الصادات.

أوجد معادلتَي المستقيمين $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ ، $\overleftrightarrow{A_2B_2}$ ثم بيّن أنهما متوازيان.

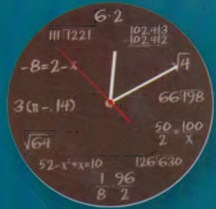
(٢٣) ارسم محوراً لتمثيل كل من الأشكال التالية إن وجد:



(٢٤) أوجد صورة النقطة (٢ ، -٣) بالانعكاس حول المحور س + ص = صفر

(٢٥) أوجد احد اثبات صورة النقطة أ (٢ ، ١) بالانعكاس حول المحور س = ١ ثم أوجد احد اثباتها بالانعكاس حول المحور ص = ١ "كلاً على انفراد".

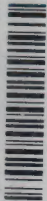
- (١) أ. ج. مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.
- (٢) إيرل و. سوكوفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزءان ، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.
- (٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة" ، جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧١ م.
- (٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية" مكتبة بغداد - عمان ، ١٩٩٤ م.
- (٥) شارل زسولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت - ١٩٨١ م.
- (٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.
- (٧) عايش زيتون "أساسيات الاحصاء الوصفي" ، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٤ م.
- (٨) عبدالرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة" جزءان، دار الفرقان للنشر والتوزيع - عمان ، ١٩٨٢ م.
- (٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الاحصاء"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
- (١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات"، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
- (١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.
- (١٢) علي عبدالله الدفاع "نوايغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.
- (١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا - موسكو، ١٩٧٥ م.
- (١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣ م.
- (١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة" ، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.
- (١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة أجزاء.
- (١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.
- (١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهاج التربية والتعليم الأردنية"، ٢٠٠٧ م.
- (١٩) وليم جويس ورفيقه "مبادئ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.



الرياضيات الشاهلة

الهصفوفات - الاقترانات الجبرية
هندسة التحويلات - الهتباينات والبرمجة الخطية

Bibliotheca Alexandrina



1213168



للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

هاتف: 00962 6 5658252 / 00962 6 5658253

فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781

البريد الإلكتروني: darosama@orange.jo

الموقع الإلكتروني: www.darosama.net